SÈRIE 4

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma.
- Puntueu cada subapartat sobre la qualificació indicada en aquestes pautes, valorant els aspectes parcials que estiguin correctes.
- Copieu la nota de la pregunta i en la casella i.
- En la qüestió 4 no descompteu punts per arrodoniments no ajustats a l'enunciat.
- En el problema 5, apartat b) puntueu 2 si la resposta conté les 31 solucions, 1.5 si conté B i C, 1 punt si conté B ó C o algun punt solució.
- Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú.

QÜESTIONS

1. Resoleu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right\}$$

Puntuació: Eliminació 1 punt; solució correcta 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Resolem per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & -4 & | & 9 \\ 1 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -6 & | & 7 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -12 & | & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

d'on resulta $\boxed{(x,y,z)=(1,1,-1)}$.

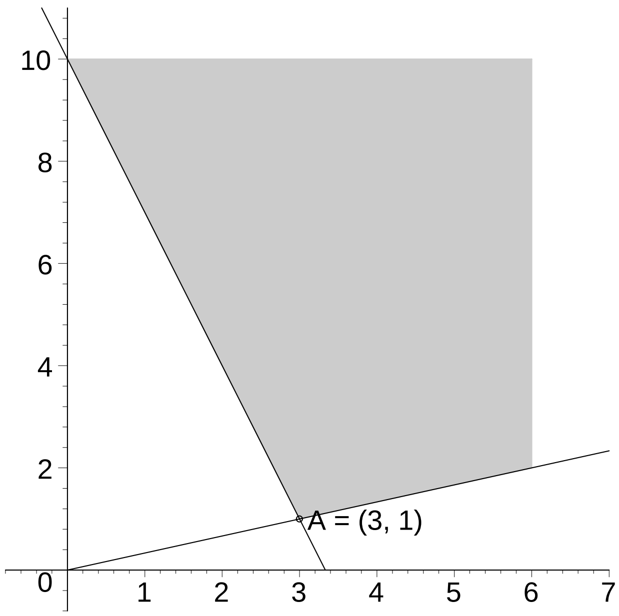
2. a) Determineu la regió solució del sistema i el seu vèrtex:

$$\begin{cases} 3x+y \geq 10, \\ x-3y \leq 0. \end{cases}$$

b) Calculeu el valor de la funció $f(x,y)=x-4y$ en el vèrtex i expliqueu raonadament si correspon a un extrem de $f(x,y)$ i de quina classe.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La regió factible és infinita i ve donada pel gràfic següent:



El vèrtex demanat és $A=(3,1)$.

b) El valor de la funció $f(x,y)=x-4y$ en A és $f(3,1)=3-4\cdot 1=-1$. Ara calculem el valor de la funció en dos punts a ambdós costats de A: El punt (6,2) està sobre el costat OA. El valor de la funció és $f(6,2)=6-4\cdot 2=-2$, o sigui que disminueix en aquesta direcció. El punt (0,10) està sobre l'altre costat. El valor de la funció en ell és $f(0,10)=0-4\cdot 10=-40$, o sigui que també disminueix en aquesta direcció. Per tant, en el punt $\boxed{A=(3,1)\text{, la funció } f(x,y)=x-4y \text{ pren el valor màxim}}$ en la regió factible.

3. a) Calculeu els punts del gràfic de la corba $y=x^3-2x^2+x+1$ on la recta tangent té pendent $-\frac{1}{3}$. b) Determineu la recta tangent en aquests punts.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) Determinem la funció derivada: $f'(x)=3x^2-4x+1$. Els punts on aquesta val $-\frac{1}{3}$ correspondran als valors de x que siguin solució de $3x^2-4x+1=-\frac{1}{3}$, que és el punt (doble): $x=\frac{2}{3}$. L'únic punt de la corba és doncs: $\left(\frac{2}{3},\frac{29}{27}\right)$.

b) La recta tangent en aquest punt serà: $\boxed{y-\frac{29}{27}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)}$ o de forma equivalent $\boxed{9x+27y-35=0}$.

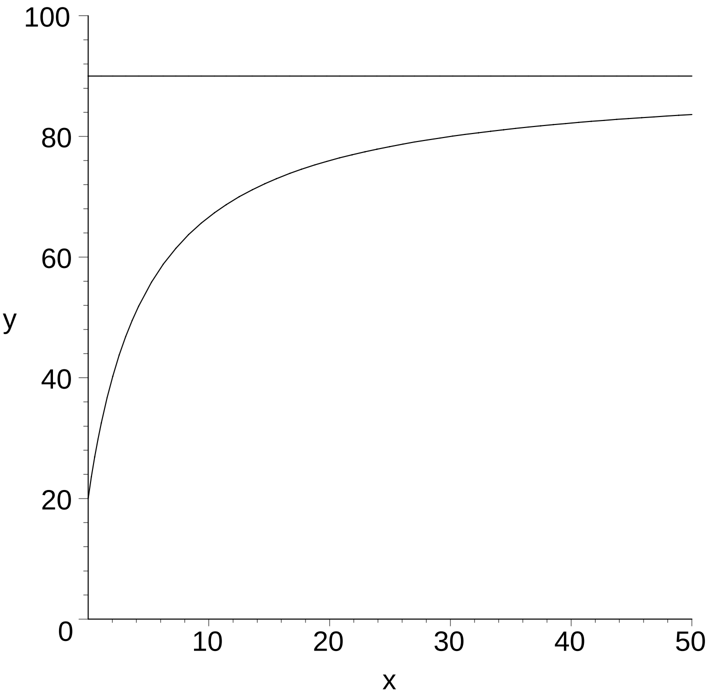
4. La funció $f(x)=\frac{90x+100}{x+5}$ indica el nombre de minuts que s'aconsella de caminar diàriament en funció del nombre x de setmanes que han passat des que es va començar un programa de manteniment.

a) Segons aquest programa de manteniment, a partir de quina setmana s'ha de caminar més d'una hora?
b) Feu un gràfic aproximat de la funció i expliqueu el seu creixement. Quant de temps aproximadament hauria de dedicar diàriament a caminar una persona que porta molt de temps seguint el programa?

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) Hem de resoldre $\frac{90x+100}{x+5}>60$. Aïllant resulta $x>\frac{20}{3}$ i la seva part entera per excés és $\boxed{\text{7 setmanes}}$.

b) El gràfic de la funció presenta una asímptota horitzontal per $y=\lim_{x\to\infty} f(x)=90$ i per $x=0$ pren el valor 20. La derivada és $f'(x)=\frac{90(x+5)-(90x-100)}{(x+5)^2}=\frac{550}{(x+5)^2}\geq 0$ i $f(x)$ és sempre creixent. Per tant la seva gràfica té la forma següent:



$\boxed{\text{quan passin moltes setmanes haurà de caminar 90 minuts}}$ que és el valor asimptòtic.

PROBLEMES

5. En una empresa s'han de fabricar dos tipus de peces que anomenarem A i B. Per fabricar una peça de tipus A es necessiten 2 quilos d'un metall i per fer-ne una de tipus B, 4 quilos del mateix metall. L'empresa disposa com a màxim de 100 quilos de metall i no pot fabricar més de 40 peces de tipus A ni més de 20 de tipus B.

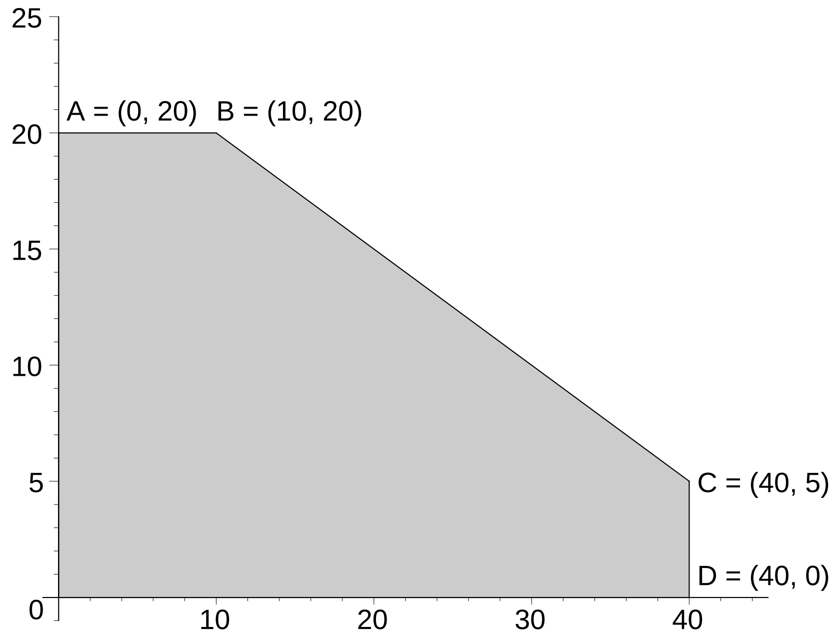
a) Expresseu amb un sistema d'inequacions les restriccions en la fabricació que té l'empresa.
b) Determineu gràficament els punts del pla que verifiquen aquest sistema.
c) D'entre les solucions obtingudes, quins són els possibles valors de peces de cada tipus (han de ser enters) si es volen exhaurir els 100 quilos de metall? Expliqueu ben bé com ho feu per trobar-los.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total 4 punts.

Solució: a) Anomenem x al nombre de peces de tipus A i y al nombre de tipus B. Les condicions es tradueixen en el sistema següent:

$$\begin{cases} 2x+4y \le 100 \\ 0 \le x \le 40 \\ 0 \le y \le 20 \end{cases}$$

b) Representem la regió factible:



c) Si volem exhaurir els 100 kg de metall el punt corresponent ha d'estar sobre la recta $2x+4y=100$ o de forma equivalent $x=50-2y$. Com la y ha d'estar entre

$5 \leq y \leq 20$, les solucions enteres són el conjunt $\boxed{\{(50-2n, n) \mid n \in \mathbf{Z}, 5 \leq n \leq 20\}}$, és a dir els punts $\boxed{(40,5), (38,6), (36,7), \ldots (12,19), (10,20).}$

6. Una marca comercial utilitza tres ingredients A, B i C en l'elaboració de tres tipus de pizzes P1, P2 i P3. La pizza P1 s'elabora amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C; la P2 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 1 de C; P3 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C. El preu de venda al públic és de 4,80 € per P1, 4,10 € per P2 i 4,90 € per P3. Sabent que el marge comercial (benefici) és de 1,60 € en cadascuna d'elles, trobeu què li costa a l'esmentada marca comercial cada unitat de A, B i C.

Puntuació: Plantejament 2 punts; solució 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: Anomenant x, y i z el que li costa a l'empresa una unitat de A, B i C respectivament, les condicions anteriors es tradueixen en el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+2y+2z+1.60 & = & 4.80 \\ 2x+y+z+1.60 & = & 4.10 \\ 2x+y+2z+1.60 & = & 4.90 \end{cases}$$

Resolent per Gauss obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 3.20 \\ 2 & 1 & 1 & | & 2.50 \\ 2 & 1 & 2 & | & 3.30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 3.20 \\ 0 & -3 & -3 & | & -3.90 \\ 0 & -3 & -2 & | & -3.10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 3.20 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1.30 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0.80 \end{pmatrix}$$

d'on resulta $\boxed{(x, y, z) = (0.60, 0.50, 0.80)}$.

SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadísitiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. El preu d'un bitllet d'una línia d'autobusos és la suma d'una quantitat fixa i una altra proporcional al nombre de quilòmetres del recorregut. S'han pagat 18 € per un bitllet a una població que dista 500 km., i 33 € per un altre a una ciutat que dista 1000 km. Quant haurem de pagar per un bitllet a una població que està a 250 km?

Puntuació: Plantejament 1 punt; solució 1 punt. Total 2 punts.

Solució: El preu del bitllet ve donat per $p = a + bx$ on x és la distància i a i b són constants a determinar. S'obtenen les equacions següents:

$$\left.\begin{aligned} a + 500b &= 18 \\ a + 1000b &= 33 \end{aligned}\right\}$$

d'on resulta $\boxed{a = 3}$ i $\boxed{b = 0,03}$. Així el preu a una població que està a una distància de 250 quilòmetres és: $\boxed{p = 3 + 0,03 \cdot 250 = 10,50€}$

2. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu A^{55}.

Puntuació: Total 2 punts. Les respostes sense raonar no puntuen.

Solució: El quadrat de A és $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per tant, tota potència parell de A serà la matriu unitat i tota potència senar serà igual a A. Així

$$\boxed{A^{55} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Nota pels correctors: Cal que donin un raonament, però no s'exigirà un rigor excessiu en la resposta. L'absència de raonament concloent es penalitzarà amb 1 punt.

3. Calculeu a i b de manera que $f(x) = a\ln(x) + bx^2 + x$ tingui extrems relatius en els punts d'abscisses $x = 1$ i $x = 2$, i esbrineu, en cada cas, si es tracta d'un màxim o d'un mínim.

Puntuació: Càlcul de a i b 1 punt; determinació del caràcter 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Si ha de tenir extrems en $x = 1$ i $x = 2$, la funció derivada $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$ ha de ser nul·la en aquests punts. Per tant:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 0 & = & f'(1) & = & a + 2b + 1 \\ 0 & = & f'(2) & = & \frac{a}{2} + 4b + 1 \end{array}\right\}$$

d'on resulta: $\boxed{a = -\frac{2}{3}}$, $\boxed{b = -\frac{1}{6}}$. D'aquí obtenim

$$f'(x) = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + 1 \quad \text{i} \quad f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}.$$

Per tant $f''(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0$, i $\boxed{\text{en } x = 1 \;\; f(x) \text{ té un mínim}}$. Anàlogament:
$f''(2) = \frac{2}{12} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0$, i $\boxed{\text{en } x = 2 \;\; f(x) \text{ té un màxim}}$.

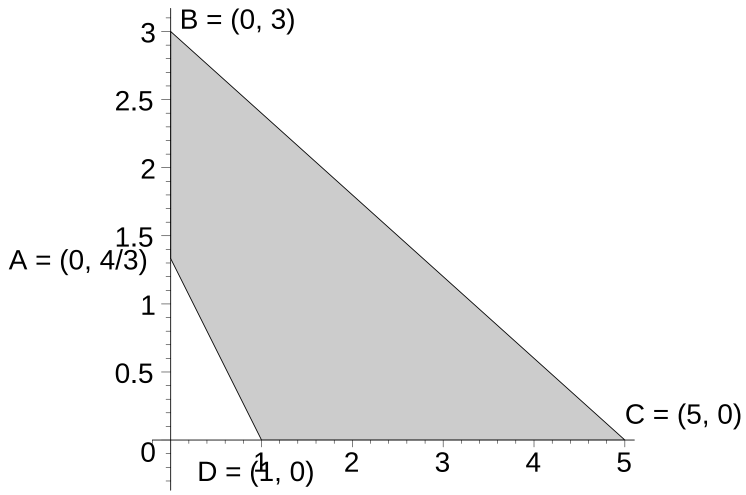
4. Calculeu en quins punts de la regió determinada pel sistema d'inequacions

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 4x+3y-4 \geq 0, \\ 3x+5y \leq 15, \end{cases}$$

la funció $F(x,y) = \dfrac{4x}{3} + y$ pren els seus valors màxim i mínim i quins valors tenen.

Puntuació: Gràfic 1 punt; determinació dels punts del contorn i obtenció de tots els punts extrems 1 punt. Total 2 punts.

Solució: La regió solució del sistema ve determinada pel gràfic següent:



Els valors de la funció en el contorn són:

	$A=\left(0,\frac{4}{3}\right)$	$B=(0,3)$	$C=(5,0)$	$D=(1,0)$
$F(x,y)=\frac{4}{3}x+y$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{20}{3}$	$\frac{4}{3}$

Per tant

el màxim s'obté en el punt $C=(5,0)$ i té el valor $\dfrac{20}{3}$,

el mínim s'obté per tots els punts del segment DA i té el valor $\dfrac{4}{3}$.

.
Nota pels correctors: Si no donen tot el segment DA com solució es penalitzarà amb 0.5 punts.

PROBLEMES

5. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba que representa $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=2$.
b) Quina és la funció que dóna el pendent de la recta tangent en cadascun dels punts de la corba?
c) Calculeu el punt de la corba que representa $f(x)$ en el qual el pendent de la recta tangent és màxim. Trobeu el valor d'aquest pendent màxim.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: a) El valor de la funció en $x=2$ és $f(2)=\dfrac{1}{5}$. La funció derivada és $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Per tant, $f'(2)=-\dfrac{4}{25}$. Així, la recta tangent té per equació:

$\boxed{y-\dfrac{1}{5}=-\dfrac{4}{25}(x-2)}$ o bé $\boxed{4x+25y-13=0}$.

b) Es tracta de la funció derivada ja calculada $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

c) Per trobar en quin punt el pendent és màxim hem de calcular la derivada de $f'(x)$ i igualar-la a 0.

$f''(x)=\dfrac{-2(1+x^2)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$. El signe de $f''(x)$ coincideix amb el del seu numerador $6x^2-2=2\left(3x^2-1\right)$, que passa (per x creixent) de positiu a negatiu en $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ i de negatiu a positiu en $\boxed{x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$. Per tant, el màxim s'obté per $\boxed{x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$. El punt màxim és $\boxed{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4}\right)}$, i el valor del pendent màxim és $\boxed{f'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$.

6. Un taller pot produir per dia com a màxim 12 articles del tipus A i 20 del tipus B. Cada dia el servei tècnic pot controlar un mínim de 20 articles i un màxim de 25, independentment del tipus.

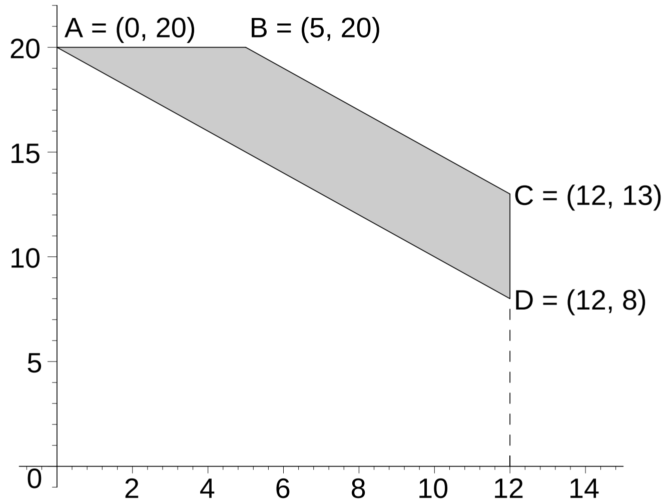
a) Siguin x i y el nombre d'articles produïts per dia dels tipus A i B, respectivament. Expresseu les condicions anteriors mitjançant un sistema d'inequacions en x i y.
b) Representeu la regió del pla determinada per aquest sistema.
c) Sabem que el benefici de produir els articles de tipus A és el doble del que s'obté amb els articles de tipus B. Trobeu quants articles de cada tipus ha de produir per obtenir un benefici màxim.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. apartat c) 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: a) El sistema de condicions és:

$$\left.\begin{array}{lcl} x & \leq & 12 \\ y & \leq & 20 \\ x+y & \geq & 20 \\ x+y & \leq & 25 \end{array}\right\}$$

b) La regió solució del sistema és:



c) La funció de benefici és $B(x,y)=k(2x+y)$, on k és una constant positiva no coneguda. La taula de valors en el contorn de la regió factible és:

	$A=(0,20)$	$B=(5,20)$	$C=(12,13)$	$D=(12,8)$
$B(x,y)=k(2x+y)$	$20k$	$30k$	$37k$	$32k$

Per tant el benefici màxim s'obté en el punt $C=(12,13)$, que correspon a produir 12 articles de tipus A i 13 articles de tipus B.