SÈRIE 2

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s’exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l’error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0.75 o 1 punt. Si l’error és molt escandalós, podeu puntuar tot l’apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d’inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x+3y & \leq & 18 \\ x+y & \leq & 10 \end{array}\right\}.$$

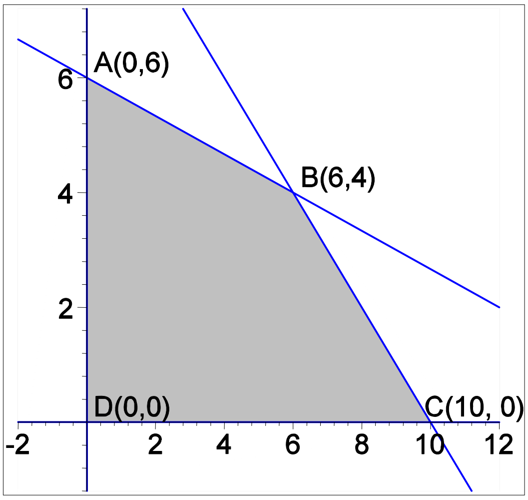
a) Representeu gràficament la regió de solucions [1 punt]
b) Determineu el màxim de la funció $f(x,y) = 3x + 5y$ en aquesta regió i per a quins valors s’assoleix aquest màxim. [0.5 punts]
c) Determineu el màxim de la funció $f(x,y) = 3x + 3y$ en aquesta regió i per a quins valors s’assoleix aquest màxim. [0.5 punts]

Solució:

a) Interseccions:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y & = & 18 \\ x+y & = & 10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 10 \\ 2y & = & 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} y & = & 4 \\ x & = & 6 \end{array}\right\}$$

Regió solució:



b) i c) Valors de les funcions objectiu als vèrtexs:

	A(0,6)	B(6,4)	C(10,0)	D(0,0)
$f(x,y) = 3x + 5y$	30	38	30	0
$f(x,y) = 3x + 3y$	18	30	30	0

b) Per tant el màxim de $f(x) = 3x + 5y$ s'assoleix en el $\boxed{\text{punt B(6,4) i te valor 38}}$.
c) Per tant el màxim de $f(x) = 3x + 3y$ s'assoleix en tot el $\boxed{\text{segment BC i val 30}}$.

2. Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els màxims, i mínims de la funció $f(x) = x^2 e^{-x}$. [2 punts]

Puntuació: Funció derivada factoritzada 1 punt; regions 1 punt. Total 2 punts.

Solució:

La derivada és $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = x(2-x)e^{-x}$. Els punts on s'anul·la són: $x = 0$ i $x = 2$. Fem la taula de creixement, decreixement i extrems:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	< 0	0	> 0	0	< 0
$f(x)$	decreix	mínim	creix	màxim	decreix

3. En un problema de programació lineal, la regió de solucions és el quadrat de vèrtexs (1,1), (1,3), (3,3) i (3,1), i la funció objectiu és $B(x,y)=3x+2y$.
a) Determineu en quin punt és màxima la funció objectiu i quin és aquest valor màxim. [1 punt]
b) Doneu un conjunt d'inequacions que determini la regió de solucions. [1 punt]

Solució:

a) Taula de valors:

	(1,1)	(1,3)	(3,3)	(3,1)
$B(x,y)=3x+2y$	5	9	15	11

Per tant, la funció objectiu és màxima en el punt (3,3) i pren el valor 15.

b) Restriccions: $1 \le x \le 3$ i $1 \le y \le 3$.

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 5 \\ 2x+3y+z &= 3 \\ ax+10y+4z &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

a) Trobeu els valors de a per als quals el sistema no és compatible determinat. [1 punt]
b) Trobeu el valor de a per al qual el valor de x és 2. Determineu també els valors de y i de z en aquest cas. [1 punt]

Solució:

a) Per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ a & 10 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 10-a & 4-a & 2-5a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 14-2a & 72-12a \end{array}\right)$$

Per tant, no és compatible i determinat si $14-2a=0$ o equivalentment per $\boxed{a=7}$.

Alternativament per determinants. El determinant del sistema és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 10 & 4 \end{vmatrix} = 12+20+a-3a-10-8 = 14-2a .$$

Amb la mateixa conclusió.

b) Si $\boxed{x = 2}$, el sistema de les dues primeres equacions dóna:

$$\left.\begin{array}{rcr} y+z & = & 3 \\ 3y+z & = & -1 \end{array}\right\}$$ que té per solució $\boxed{y = -2}$, $\boxed{z = 5}$.

Substituint ara en la tercera equació, resulta $2a - 20 + 20 = 2$, d'on $\boxed{a = 1}$.

PROBLEMES

5. Un trajecte de 200 km ha de fer-se combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 5 €/km; el del ferrocarril de 2 €/km, i el de l'autobús, de 3 €/km. El recorregut ens ha costat 500 € per haver fet el doble de km amb ferrocarril que en taxi i autobús junts. Determineu les distàncies que hem recorregut amb cada mitjà de transport.

[4 punts]

Puntuació: Planteig 2 punts; solució 2 punts. Total 4 punts.

Solució:

Anomenant x, y, z a les distàncies recorregudes respectivament en taxi, ferrocarril i autobús, resulta el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcc} x+y+z & = & 200 \\ 5x+2y+3z & = & 500 \\ y & = & 2(x+z) \end{array}\right\}$$

Resolent-lo pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 5 & 2 & 3 & 500 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -2 & -500 \\ 0 & 3 & 0 & 400 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -2 & -500 \\ 0 & 0 & -2 & -100 \end{array}\right)$$

D'on resulta $\boxed{z = 50 \text{ km}, \ y = \frac{400}{3} = 133,33 \text{ km i } x = \frac{50}{3} = 16,66 \text{ km}}$.

6. Un equip de treballadors ha de fer la collita d’un camp de pomeres a partir de l’1 d’octubre i només poden treballar durant un dia. Si la collita es fa l’1 d’octubre, es colliran 60 tones i el preu serà de 2000 €/tona. Sabem que a partir d’aquest dia, la quantitat que es pot collir augmenta en una tona cada dia, però el preu de la tona disminueix en 20 €/dia.

a) Determineu la fórmula que expressa els ingressos que s’obtenen en funció del nombre de dies que es deixen passar des de l’1 d’octubre per fer la collita. [1 punt]

b) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin màxims. [1 punt]

c) Digueu quin és el valor màxim dels ingressos per la collita. [1 punt]

d) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin els mateixos que si es fes el dia 1 d’octubre. [1 punt]

a) La quantitat de tones que es cullen en funció del nombre t de dies que es deixen passar a partir de l’1 d’octubre és: $Q(t) = 60 + t$. El preu per tona és $P(t) = 2000 - 20t$. Per tant, els ingressos són:

$$\boxed{I(t) = Q(t)P(t) = (60+t)(2000 - 20t) = -20t^2 + 800t + 120000}.$$

b) La funció derivada és: $I'(t) = -40t + 800$. Per trobar el punt on els ingressos tenen un màxim relatiu cal que la derivada sigui 0. Per tant resulta $\boxed{t = 20 \text{ dies}}$. I realment és un màxim relatiu ja que $I''(t) = -40$ és negativa.

c) El valor màxim dels ingressos és $\boxed{I(20) = 80 * 1600 = 128000\text{ €}}$.

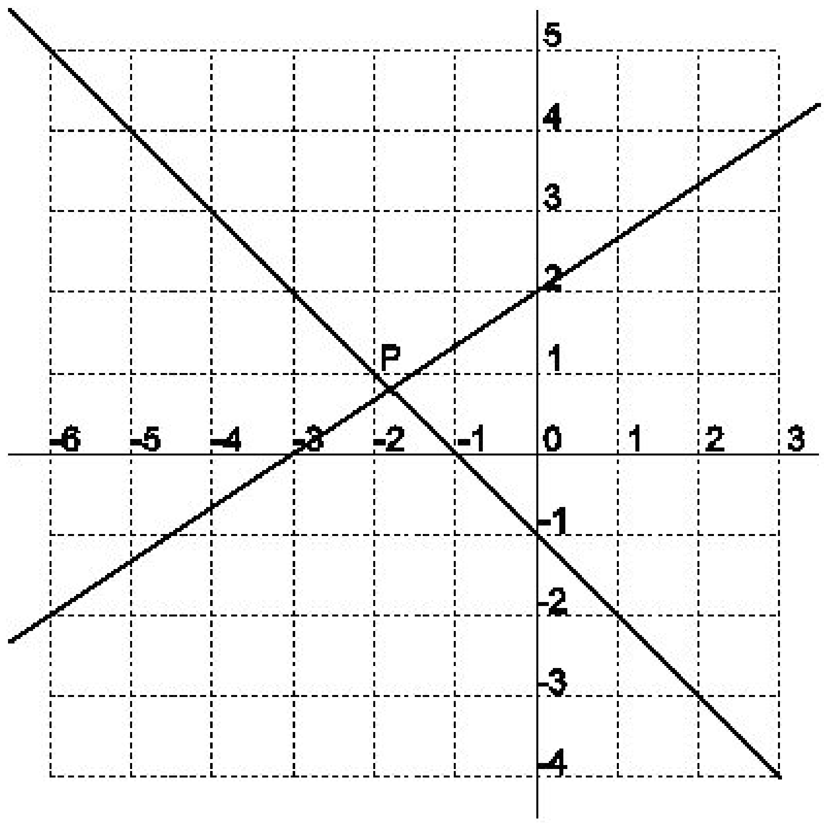
d) Perquè els ingressos tornin a ser els del dia 1 d’octubre cal que
$f(t) = -20t^2 + 800t + 120000 = f(0) = 120000$.
O sigui $-20t^2 + 800t = 0$ i per tant $20t(-t + 40) = 0$, i la solució no nul·la és $\boxed{t = 40\ dies}$.

SÈRIE 5

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0.75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. Cadascuna de les rectes del gràfic passa per almenys dos punts de coordenades enteres.
   a) Trobeu les equacions de les dues rectes. [1 punt]
   b) Trobeu el punt d'intersecció P. [1 punt]



Solució: a) Una recta passa pel punt $(0,2)$ i té pendent $\frac{2}{3}$. Per tant la seva equació és: $\boxed{y=\frac{2}{3}x+2}$. L'altra passa pel punt $(0,-1)$ i té pendent -1. La seva equació és: $\boxed{y=-x-1}$.

b) El punt d'intersecció s'obté resolent el sistema format per les equacions de les dues rectes:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 6 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

que té per solució: $x=-\frac{9}{5}$, $y=\frac{4}{5}$. Per tant, $\boxed{P=\left(-\frac{9}{5},\frac{4}{5}\right)}$.

2. Donades les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu $A^2+2AB+B^2$; [1 punt]

b) Calculeu $(A+B)^2$. [1 punt]

Solució:

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$2AB=2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix},$$

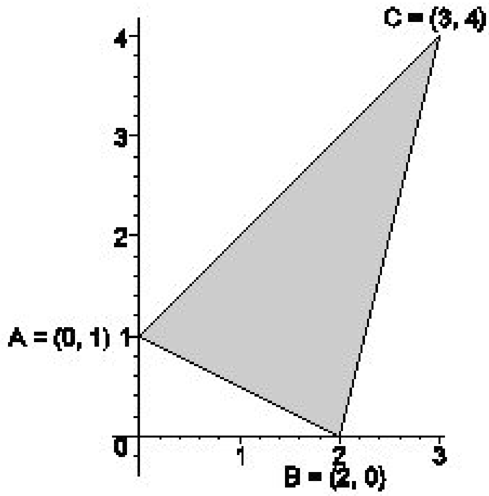
$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

b) $$(A+B)^2=\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle de vèrtexs (0,1), (2,0) i (3,4). [2 punts]

Puntuació: Equacions 1 punt; inequacions 1 punt. Total: 2 punts. Gradueu la nota en funció dels errors de càlcul i signes.

Solució: Dibuixem la regió factible.



La recta AC té ordenada a l'origen 1 i pendent 1. La seva equació és $y = x + 1$, i la regió factible que delimita serà $y \leq 1 + x$.

La recta AB té ordenada a l'origen 1 i pendent $-\frac{1}{2}$. La seva equació és $y = -\frac{1}{2}x + 1$, i la regió factible que delimita serà $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$.

La recta BC passa pel punt (2,0) i té pendent 4. La seva equació és $y = 4(x-2)$, i la regió factible que delimita serà $y \geq 4(x-2)$. El sistema demanat és:

$$\boxed{\begin{cases} y & \leq & x+1 \\ y & \geq & -\frac{1}{2}x+1 \\ y & \geq & 4x-8 \end{cases}}$$

4. Una fàbrica de televisors ven cada aparell a 300 €. Les despeses de fabricar x televisors són $D(x) = 200x + x^2$, en què $0 \le x \le 80$.

a) Suposant que es venen tots els televisors que es fabriquen, doneu la funció dels beneficis que s'obtenen després de fabricar i vendre x televisors. [1 punt]

b) Determineu el nombre d'aparells que convé fabricar per obtenir el benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim. [1 punt]

Puntuació: Apartat a) 0.5 punts; apartat b) funció beneficis 0.5 punts; benefici màxim 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) Els ingressos són $\boxed{I(x) = 300x}$.

b) El benefici és $\boxed{B(x) = 300x - (200x + x^2) = 100x - x^2}$. Per trobar el benefici màxim determinem la derivada i igualem a 0: $B'(x) = 100 - 2x$. Per tant l'extrem relatiu s'obté per $\boxed{x = 50}$. Es tracta òbviament d'un màxim ja que és una paràbola amb coeficient a negatiu (també es pot veure pel signe de la derivada segona que és negatiu). El benefici màxim és $\boxed{B(50) = 2500\text{ €}}$.

PROBLEMES

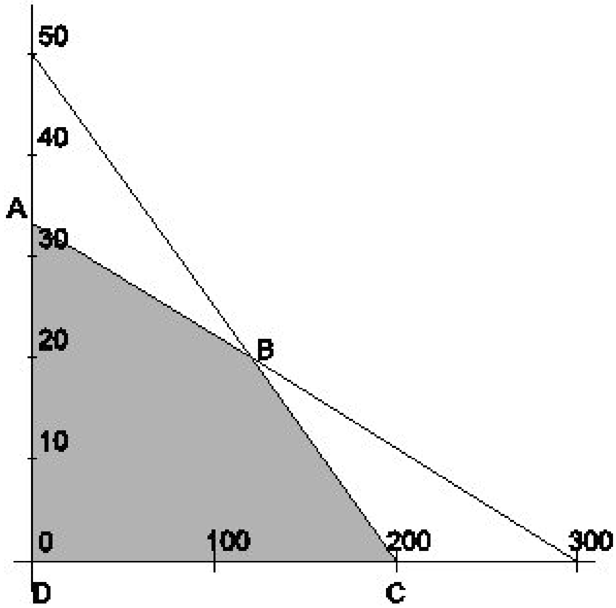
5. El vaixell de Barcelona a Palma de Mallorca porta automòbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa 4 places d'automòbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automòbils. Cada automòbil pesa 1.000 kg i cada camió 9.000 kg. El pes total permès per a la càrrega és de 300.000 kg. La companyia cobra 50 € per cada cotxe i 300 € per cada camió. Calculeu el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per obtenir un benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim. [4 punts]

Puntuació: plantejament del sistema: 1 punt; gràfic: 1 punt; determinació dels vèrtexs: 1 punt; determinació del benefici màxim: 1 punt. Total: 4 punts.

Solució: Anomenem x al nombre de cotxes i y al nombre de camions. Les restriccions són: $x + 4y \le 200$ pel que fa al nombre de places i $1000x + 9000y \le 300000$ pel que fa al pes. A més totes dues incògnites han de ser positives. El sistema de restriccions és:

$$\boxed{\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 4y \le 200 \\ x + 9y \le 300 \end{cases}}$$

que dóna la regió factible del gràfic següent:



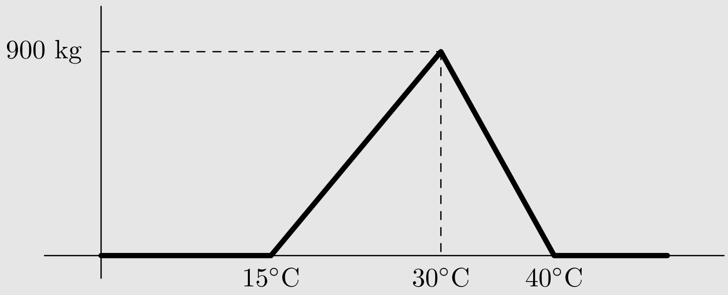
Determinem les coordenades dels vèrtexs: B és el punt d'intersecció de les dues rectes $x+4y=200$ i $x+9y=300$ i val $B=(120,20)$. Els altres dos són les interseccions amb els eixos de les rectes anteriors que són: $A=\left(0,\frac{100}{3}\right)$ i $C=(200,0)$.

La funció objectiu de beneficis que volem maximitzar és $B(x,y)=50x+300y$. Fem la taula

	$A\left(0,\frac{100}{3}\right)$	$B(120,20)$	$C(200,0)$	$D(0,0)$
$B(x,y)=50x+300y$	10000	12000	10000	0

Per tant, el benefici màxim s'obté portant 120 cotxes i 20 camions i és de 12000 €.

6. Un hivernacle està destinat al cultiu de tomàquets. Se sap que les tomaqueres només produeixen fruits si la temperatura de l'hivernacle està entre 15^oC i 40^oC. La gràfica següent dóna la producció de tomàquets en quilos, segons la temperatura que es manté a l'hivernacle.



a) Si la temperatura està entre 15^oC i 29^oC, digueu quina variació experimenta la producció en augmentar la temperatura 1^oC. Calculeu aquesta variació quan la temperatura està entre 30^oC i 39^oC. [1.5 punts]

b) Definiu una funció a trossos que expressi la producció en funció de la temperatura. [1.5 punts]

c) Trobeu les temperatures per les quals s'obté el 75% de la producció màxima. [1 punt]

Solució: a) Per a temperatures entre 15^oC i 29^oC la variació que experimenta la producció en augmentar 1^oC la temperatura és de $\frac{900}{15} = 60\,\text{kg}/^o$. Per temperatures entre 30^oC i 39^oC és de $-\frac{900}{10} = -90\,\text{kg}/^o$.

b) La funció que descriu el gràfic donat és:

$$\boxed{f = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 15 \\ 60(t-15) & \text{si} \quad 15 < t \leq 30 \\ -90(t-40) & \text{si} \quad 30 < t \leq 40 \\ 0 & \text{si} \quad t > 40 \end{cases}}$$

c) El 75% de 900 és 675. Per tant els valors de pels quals s'obté el 75% de la producció màxima són:

$$\left.\begin{array}{l} 60(t-15) = 675 \quad \to \quad t = 15 + \frac{675}{60} = 26.25^o\text{C} \\ -90(t-4) = 675 \quad \to \quad t = 40 - \frac{675}{90} = 32.5^o\text{C}. \end{array}\right\}$$