SÈRIE 1

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x+y & \leq & 10 \\ x+y & \leq & 8 \\ x & \leq & 4 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}.$$

a) Representeu gràficament la regió de solucions [1 punt]
b) Determineu el màxim de la funció $f(x,y)=2x+y$ en aquesta regió. Digueu per a quins valors s'assoleix aquest màxim. [1 punt]

Puntuació: Descomptar 0.5 punts en b) si no donen tot l' interval solució.

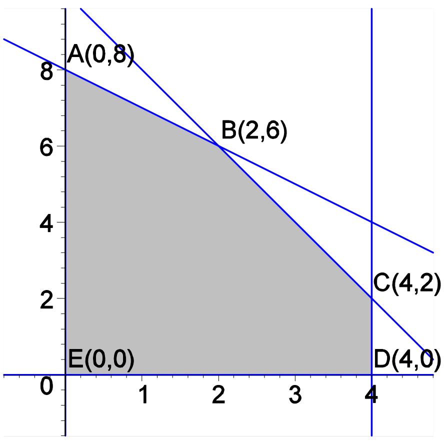
Solució:

a) Els punts d'intersecció són:

$$\begin{cases} x+y = 8 \\ 2x+y = 10 \end{cases} \rightarrow B=(2,6) \qquad \begin{cases} 2x+y = 10 \\ x=4 = 0 \end{cases} \rightarrow C=(4,2)$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D=(4,0) \qquad \begin{cases} x+y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A=(0,8)$$

La gràfica és:



b) Els valors de $f(x,y)$ en els vèrtexs de la regió solució són:

	A(0,8)	B(2,6)	C(4,2)	D(4,0)	E(0,0)
$f(x,y)=2x+y$	8	10	10	8	0
		màxim	màxim		

I s'obté el màxim en tot el segment BC i té per valor $\boxed{f(x,y)=10}$.

2. Digueu si un sistema de dues equacions amb tres incògnites pot ser incompatible. Justifiqueu la resposta i, si escau, exemplifiqueu-ho. [2 punts]

Puntuació: Posar un bon exemple 1.5 punts; raonament 0.5 punts. Total 2 punts.

Solució:

Un sistema amb més d'una equació pot ser incompatible, independentment del nombre d'incògnites. Només cal que hi hagi, per exemple, dues equacions amb termes de les incògnites iguals i els termes independents deferents. Aleshores, cap valor de les incògnites satisfarà ambdues equacions.

Exemple:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x+y+z & = & 2 \end{array}\right\}$$

3. Calculeu els paràmetres a,b,c de la funció $f(x)=ax^2+bx+c$, sabent que la recta $5x-y-2=0$ és tangent a la corba $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$ i que el valor mínim absolut que pren la funció és -49/12. [2 punts]

Puntuació: Raonament i/o planteig correcte 1 punt; solució 1 punt; Total 2 punts.

Solució:

El pendent de la recta tangent a la paràbola en un punt d'abscissa x és el valor de la derivada $f'(x)=2ax+b$, i si $x=0$, el pendent és b. El pendent de la recta és 5, i per tant ha de ser $\boxed{b=5}$. Per $x=0$ el valor de y de la recta és $y=-2$, i el valor de y de la paràbola és c. Per tant ha de ser $\boxed{c=-2}$. El valor mínim de $f(x)$ s'obté en el punt on $f'(x)=2a+b=0$, o sigui per $x=-\dfrac{b}{2a}$, i en aquest punt, la funció pren el valor

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$$

Substituint els valors de b,c obtenim $-\dfrac{25}{4a}-2=-\dfrac{49}{12}$, d'on resulta $\boxed{a=3}$. Per tant la funció és $\boxed{f(x)=3x^2+5x-2}$.

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x - y + 2z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \\ x + 3y & = & 0 \end{array}\right\}.$$

a) Expliqueu, raonadament, quantes solucions té. [1 punt]
b) Trobeu una solució amb $z = 5$. [1 punt]

Solució:

a) És un sistema homogeni. Per tant sempre té almenys la solució trivial $(x, y, z) = (0,0,0)$. En aquest cas, resolent per Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I per tant té una infinitat de solucions, depenent del valor de z.

$$-5y = -z; \quad y = \frac{1}{5}z;$$

$$x = -3y; \quad x = -\frac{3}{5}z;$$

b) Per $z = 5$, resulta $\boxed{y = 1, \quad x = -3}$.

PROBLEMES

5. Un llibreter vol fer una comanda de dos classes de llibres a dos editors, A i B. L'editor A ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 5 novel·les per 50 €. L'editor B ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 10 novel·les per 150 €. El llibreter vol comprar, com a mínim, 2500 llibres d'assaig i 3500 novel·les. Per un compromís adquirit amb l'editor B, no pot comprar a l'editor A més de 3 vegades el que compra a l'editor B. Determineu quants lots haurà de comprar a cada editor per minimitzar a el cost i poder complir el seu compromís. [4 punts]

Puntuació: Inequacions 1 punt; vèrtexs 1 punt; gràfica 1 punt; solució 1 punt. Total 4 punts.

Solució:

Planteig: Taula de dades:

	assaig	novel·la	preu/lot
A	5	5	50
B	5	10	150
	2500	3500	

Siguin x, y el nombre de lots que compra respectivament als llibreters A i B.

Inequacions:

$$\left.\begin{array}{ccc} 5x+5y & \geq & 2500 \\ 5x+10y & \geq & 3500 \\ x \leq 3y, & x \geq 0, & y \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{ccc} x+y & \geq & 500 \\ x+2y & \geq & 700 \\ x \leq 3y, & x \geq 0, & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Vèrtexs:

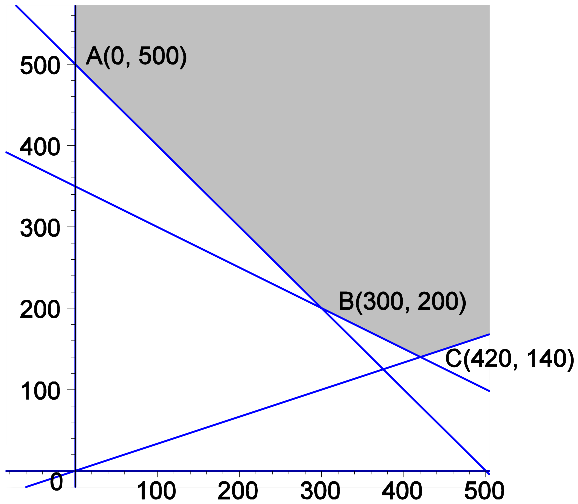
$$\left.\begin{array}{ccc} x+y & = & 500 \\ x & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0,500) \qquad \left.\begin{array}{ccc} x+y & = & 500 \\ x+2y & = & 700 \end{array}\right\} \rightarrow A(300,200)$$

$$\left.\begin{array}{ccc} x+2y & = & 700 \\ x & = & 3y \end{array}\right\} \rightarrow C(420,140)$$

Funció objectiu: $f(x,y) = 50x + 150y$.

S'ha de trobar el seu mínim absolut.

Gràfica :



Valors de la funció de cost:

	A(0,500)	B(300,200)	C(420,140)
$f(x,y)=50x+150y$	75000	45000	42000

Per altra banda, sobre la semirrecta $y=\frac{1}{3}x$ que s'inicia en el punt C(420,140) en el sentit d'augmentar x i y, el valor de la funció és: $f(x,y)=50x+150\frac{x}{3}=100x$ que creix al créixer x. Per tant, el punt C(420,140) representa clarament el mínim de la funció. Ha de comprar $\boxed{\text{420 lots al llibreter A i 140 lots al llibreter B}}$ i el cost total mínim corresponent, preservant les restriccions, és de $\boxed{\text{42000 €}}$.

6. La taxa d'inflació interanual d'un determinat país durant l'any 2007 expressada en punts percentuals, *i(t)*, es pot aproximar mitjançant la funció:

$$i(t)=\frac{t^2-10t+9}{40}+3, \qquad 1\le t\le 12,$$

en què t és el temps en mesos des del començament de l'any i $t=1$ és el mes de gener.

a) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació interanual se situa en 3 punts percentuals [1 punt]
b) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació és decreixent i en quins és creixent [0.5 punts]
c) Trobeu en quin mes la taxa d'inflació assoleix el valor mínim i calculeu aquest valor [0.5 punts]
d) Feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció. [1 punt]
e) Trobeu en quin mes la taxa d'inflació assoleix el valor màxim i calculeu aquest valor [1 punt]

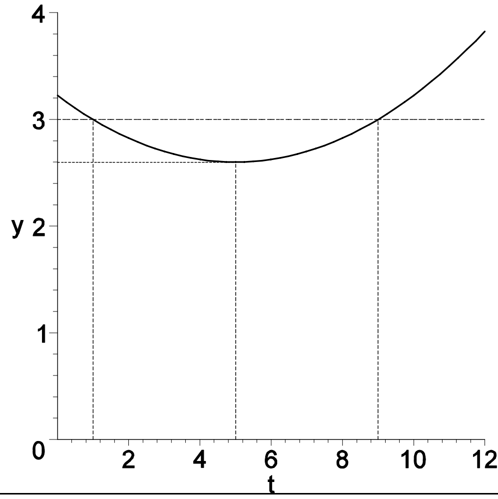
Solució:

a) Planteig: $\frac{t^2-10t+9}{40}+3=3$. Així doncs $t^2-10t+9=0$, obtenint-ne dues solucions $t=1$ i $t=9$ (gener i setembre).

b) Creixement i decreixement: $i'(t)=\frac{2t-10}{40}$, que és positiu si $t>5$ i negatiu si $t<5$. Per tant creix en l'interval $t>5$ (juny, juliol, agost, setembre octubre novembre, desembre) i decreix en l'interval $t<5$ (gener, febrer, març,abril).

c) El mínim és per $t=5$ (maig) i la inflació és $i(5)=2,6\%$.

d) Gràfica:



e) El valor màxim absolut s'obté el mes de desembre i val $i(12)=\frac{153}{40}=3,825\%$.