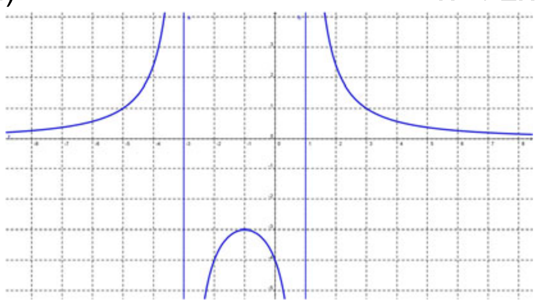
SÈRIE 3

1. Sobre la funció $f(x)=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ disposem de les dades següents:
   - Les seves asímptotes verticals són x = -3 i x = 1.
   - La seva gràfica passa pel punt (0,-4).

   a. Determineu la fórmula de la funció, i feu-ne un dibuix aproximat de la gràfica corresponent. *[1 punt]*

   b. En el cas a = 1, b = -2, c = -1 determineu i classifiqueu, si existeixen, els extrems relatius de la funció. *[1 punt]*

a. Les seves asímptotes fan que la funció hagi de ser de la forma $f(x)=\dfrac{a}{(x+3)(x-1)}$. A més tenim que $f(0)=\dfrac{a}{3\cdot(-1)}=-4 \rightarrow a=12$. Per tant, $f(x)=\dfrac{12}{x^2+2x-3}$. La seva gràfica és:



b. En aquest cas la funció és $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-1}$, i la seva derivada és

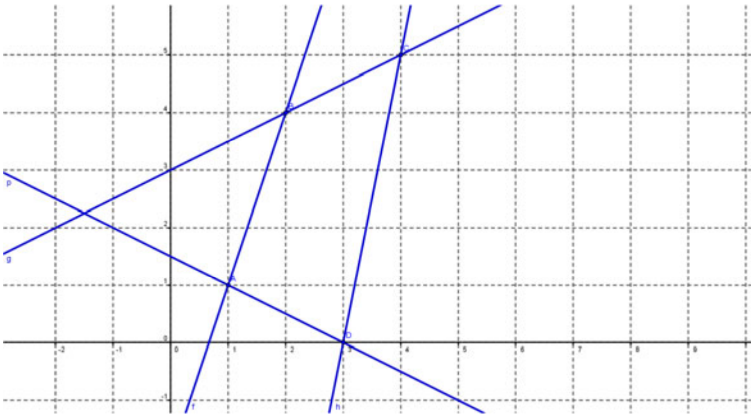
$f'(x)=\dfrac{-2x+2}{(x^2-2x-1)^2}$, que s'anul·la per x = 1. Per tant, (1,-1/2) és l'únic extrem relatiu de la funció, i és un màxim perquè f' és positiva per valors propers a 1, però menors, i negativa per a valors propers a 1, però més grans.

2. Construïm en el pla el quadrilàter de vèrtexs A(1,1), B(2,4), C(4,5), D(3,0), els costats del qual són els segments AB, BC, CD i DA.

   a. Escriviu les desigualtats que determinen la regió del pla continguda i sobre els costats del quadrilàter ABCD. *[1 punt]*

   b. Feu servir les desigualtats anteriors per a justificar si els punts P(3,1), Q(3,4), R(5,2) són interiors, exteriors o estan sobre els costats del quadrilàter. *[1 punt]*

Per a facilitar el problema, dibuixem el quadrilàter:



Fent servir qualsevol dels mètodes trobem les equacions de les quatre rectes:

recta que passa per AB: $3x - y - 2 = 0$
recta que passa per BC: $x - 2y + 6 = 0$
recta que passa per CD: $5x - y - 15 = 0$
recta que passa per AD: $x + 2y - 3 = 0$

Per tant, les desigualtats que determinen el quadrilàter són:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 2 \geq 0 \\ x - 2y + 6 \geq 0 \\ 5x - y - 15 \leq 0 \\ x + 2y - 3 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

b. El punt P(3,1) verifica: $9 - 1 - 2 > 0$, $3 - 2 + 6 > 0$, $15 - 1 - 15 < 0$, $3 + 2 - 3 > 0$. Per tant, és interior al quadrilàter ABCD.
El punt Q(3,4) verifica $9 - 4 - 2 > 0$, $3 - 8 + 6 > 0$, $15 - 4 - 15 < 0$, $3 + 8 - 3 > 0$. Per tant, és interior al quadrilàter ABCD.
El punt R(5,2) verifica: $15 - 2 - 2 > 0$, $15 - 4 + 6 > 0$, però $25 - 2 - 15 > 0$. Per tant, és fora del quadrilàter ABCD.

3. Considerem les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
   a. Justifiqueu si és possible efectuar A·B o B·A. En cas afirmatiu, calculeu-ho. *[1 punt]*
   b. Calculeu B^2 i B^3. *[1 punt]*

a. No és possible calcular A·B perquè el nombre de columnes de A és diferent del nombre de files de B. Sí que podem calcular B·A:

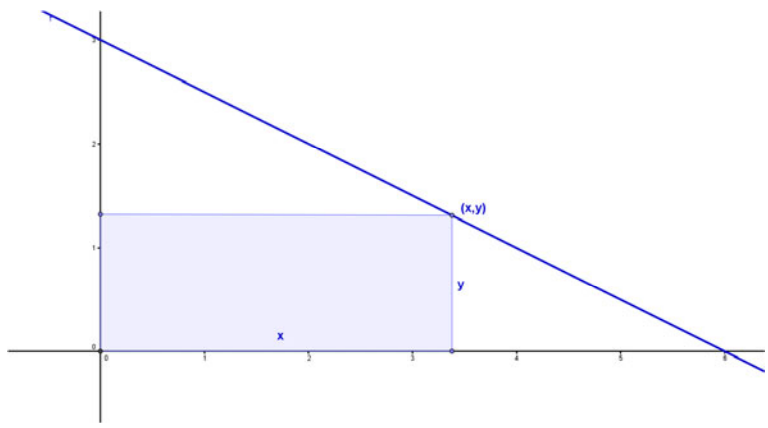
$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

b.

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}, B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -31 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}\mathbb{S}$$

4. Un triangle té vèrtexs O(0,0), A(6,0), B(0,3).
   a. Dibuixeu-lo i escriviu l'equació de la recta que conté el segment AB. *[0,5 punts]*
   b. Considerem un punt P situat sobre el segment AB, i dibuixem el rectangle que té diagonal OP i dos costats sobre els eixos de coordenades. Determineu les coordenades de P que fan màxima l'àrea del rectangle. *[1,5 punts]*

a. L'equació de la recta que conté el segment AB és $y=-\dfrac{1}{2}x+3$. El triangle, i el rectangle de què ens parlen a l'apartat b., són aquests:



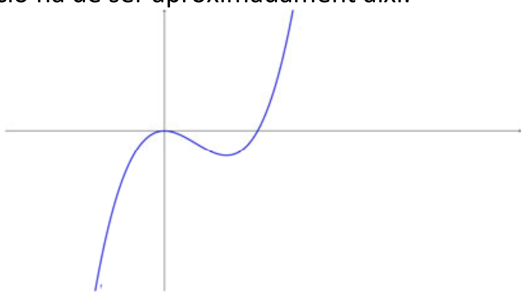
b. Com que el punt (x,y) es troba sobre la recta, les seves coordenades han de ser de la forma $\left(x, -\frac{1}{2}x+3\right)$. L'àrea del rectangle és, per tant,

$$A(x) = x\left(-\frac{1}{2}x+3\right) = -\frac{1}{2}x^2+3x$$

$A'(x) = -x+3 = 0$ quan x = 3. A més, quan x < 3 la derivada positiva i quan x > 3 és negativa: x = 3 correspon a un màxim relatiu. El punt demanat és, per tant, $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

5. Sigui f una funció polinòmica de grau 3 amb un màxim a (0,0) i un mínim a (2,-4).
   a. Feu una gràfica aproximada de f. *[0,5 punts]*
   b. Determineu la fórmula de la funció. *[1,5 punts]*

a. La gràfica de la funció ha de ser aproximadament així:



b. L'equació és de la forma $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ i $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$. Amb les dades que tenim podem escriure:

- $f(0) = 0 \rightarrow d = 0$.
- $f(2) = 8a+4b = -4$.
- $f'(0) = c = 0$.
- $f'(2) = 12a+4b = 0$.

D'aquestes condicions obtenim a = 1, b = -3, c = 0, d = 0. La fórmula de la funció és, per tant, $f(x) = x^3-3x^2$.

6. En Joan, en Pere i en Marc tenen, entre els tres, seixanta-tres anys. Si en Joan tingués tres anys menys, la seva edat seria el doble de les edats d'en Pere i en Marc junts. Si en Pere tingués un any més, la seva edat seria la meitat de la d'en Marc. Quina és l'edat actual de cadascun d'ells? *[2 punts]*

El sistema que es dedueix de les dades és, si anomenem J, P, M les respectives edats:

$$\left.\begin{array}{r} J+P+M=63 \\ J-3=2(P+M) \\ P+1=\dfrac{1}{2}M \end{array}\right\}.$$

Ordenant les incògnites i resolent el sistema pel mètode de Gauss obtindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & -3 & -3 & -60 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -3 & -42 \end{array}\right).$$

D'aquí obtenim de seguida J = 43, P = 6, M = 14, que són les edats respectives d'en Joan, en Pere i en Marc.