SÈRIE 3

1. En Pol, la Júlia i la Maria han comprat un regal. La Júlia ha gastat la meitat que la Maria, i en Pol n'ha gastat el triple que la Júlia.
   a. Expliqueu raonadament si amb aquestes dades en tenim prou per a determinar quant ha gastat cadascun d'ells. *[1 punt]*
   b. Si a més ens diuen que entre tots tres han gastat 63 €, quant ha gastat cadascú? *[1 punt]*

a. Anomenarem x als diners que ha gastat en Pol, y als que ha gastat la Júlia i z als que ha gastat la Maria. Les dades es tradueixen amb el sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{z}{2} \\ x = 3y \end{cases}.$$

Tenim tres incògnites i dues equacions. Per tant, no podem determinar el que ha gastat cadascú.

b. Ara el sistema d'equacions es converteix en:

$$\begin{cases} y = z/2 \\ x = 3y \\ x + y + z = 63 \end{cases},$$

que té com a solucions x = 31,5 , y = 10,5 , z = 21. Per tant, en Pol ha gastat 31,5 €, la Júlia ha gastat 10,5 € i la Maria ha gastat 21 €.

---

2. La gràfica de la derivada f' de la funció f és una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts (5,0) i (1,0), i té el vèrtex en el punt (3,-4).
   a. Expliqueu raonadament en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent. Indiqueu-ne els extrems relatius i classifiqueu-los. *[1 punt]*
   b. Sabem que f(3)=2. Determineu l'equació de la recta tangent a la funció f en el punt (3,2). *[1 punt]*

a. Amb aquestes dades podem afirmar que f' és positiva i, per tant, f és creixent, a $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ i f' és negativa i, per tant, f és decreixent, a l'interval $(1,5)$. En conseqüència, f té un màxim a x = 1 i un mínim a x = 5.

b. f'(3) = -4, que serà el pendent de la recta tangent que ens demanen. A més, (3,2) és el punt de tangència; la recta és $y-2=-4(x-3)$ o bé $y=-4x+14$.

3. Una cadena de televisió decideix emetre un nou programa en la franja horària de les 17:00 h a les 21:00 h. El percentatge d'audiència *P* de la primera emissió en funció del temps *t,* mesurat en hores, és definit per la funció

$$P(t)=\frac{1}{5}\left(-t^3+49t^2-760t+3690\right) \qquad 17\leq t\leq 21$$

Els directius de la cadena acorden que el programa se seguirà emetent si en algun moment s'aconsegueix un percentatge d'audiència superior al 20 %.

a. Expliqueu raonadament en quins intervals de temps l'audiència del programa va augmentar i en quins intervals va disminuir. *[1 punt]*

b. En vista dels resultats, se seguirà emetent el programa? Justifiqueu la resposta. *[1 punt]*

a. $P'(t)=\frac{1}{5}(-3t^2+98t-760)$ si $17\leq t\leq 21$. L'únic valor positiu de l'interval que fa zero aquesta derivada és t = 20. A més, P'(t) és positiva quan t < 20, i és negativa quan t > 20. Per tant, la funció té un màxim relatiu a t = 20. Tindrem, doncs, que el percentatge d'audiència va augmentar de les 17:00 h. fins a les 20:00 h., i va disminuir de les 20:00 h. a les 21:00 h.

b. Hem vist a l'apartat anterior que P té un màxim relatiu quan $t=20$, amb un percentatge d'audiència de $P(20)=18\%$. El signe de la derivada ens diu que $P(17)$ i $P(21)$ són menors que $P(20)$. Per tant, a les 20:00 h. s'aconsegueix el màxim absolut de percentatge d'audiència. En cap moment s'ha aconseguit, doncs, un percentatge igual o superior al 20% i per tant el programa es deixarà d'emetre.

---

4. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determineu x per tal que es verifiqui l'equació $A^2-6A+5I=0$, on 0 és la matriu en què tots els elements són 0. *[2 punts]*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} x^2-6x+5 & 0 \\ 0 & x^2-6x+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

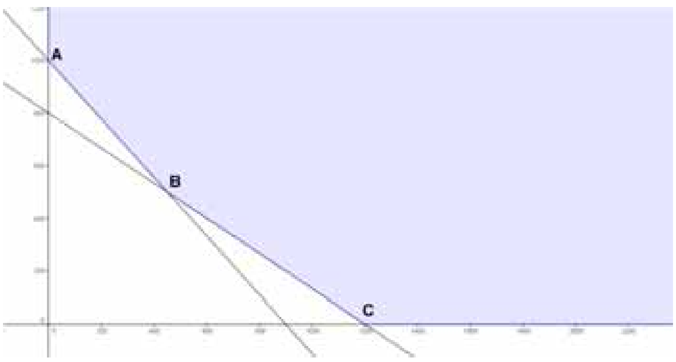
Resolent l'equació obtenim x = 1, x = 5.

---

5. Hem de fertilitzar els terrenys d'una finca utilitzant dos adobs A i B. El cost de l'adob A és de 0,9 €/Kg, i l'adob B costa 1,5 €/Kg. L'adob A conté un 20% de nitrogen i un 10% de fòsfor, mentre que l'adob B en conté un 18% i un 15%, respectivament. Per tal de fertilitzar els terrenys correctament ens cal un mínim de 180 kg de nitrogen i 120 Kg de fòsfor.
    a. Si anomenem x els kilograms d'adob A i y els kilograms d'adob B, escriviu el sistema d'inequacions que satisfà les condicions anteriors. *[1 punt]*
    b. Quina és la despesa mínima que hem de fer si volem fertilitzar els terrenys de la finca correctament? *[1 punt]*

a. El sistema és: $\left.\begin{array}{l} 0{,}2x+0{,}18y\geq 180 \\ 0{,}1x+0{,}15y\geq 120 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$.

b. Els vèrtexs de la regió factible són $A(0,1000)$, B(450,500), C(1200,0). La regió factible és oberta. La funció objectiu és $z=0{,}9x+1{,}5y$, que ens els vèrtexs pren els valors $z(A)=1500$, $z(B)=1155$, $z(C)=1080$. Per tant, la despesa mínima serà de 1080 €, si fertilitzem amb 1200 Kg. de l'adob A.



---

6. Sigui la funció $f(x)=x\cdot e^{x}$.
    a. Si la funció f té extrems relatius, determineu-los i classifiqueu-los. *[1 punt]*
    b. Calculeu la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x = 0. *[1 punt]*

a. $f'(x)=e^{x}(1+x)$, que només s'anul·la quan x = -1. Com que la derivada és negativa quan x < -1 i és positiva quan x >-1, la funció f té un mínim a x = -1.

b. f(0) = 0, f'(0) = 1. Per tant, la recta tangent és y = x.
