SÈRIE 2

PAUTES PER ALS CORRECTORS

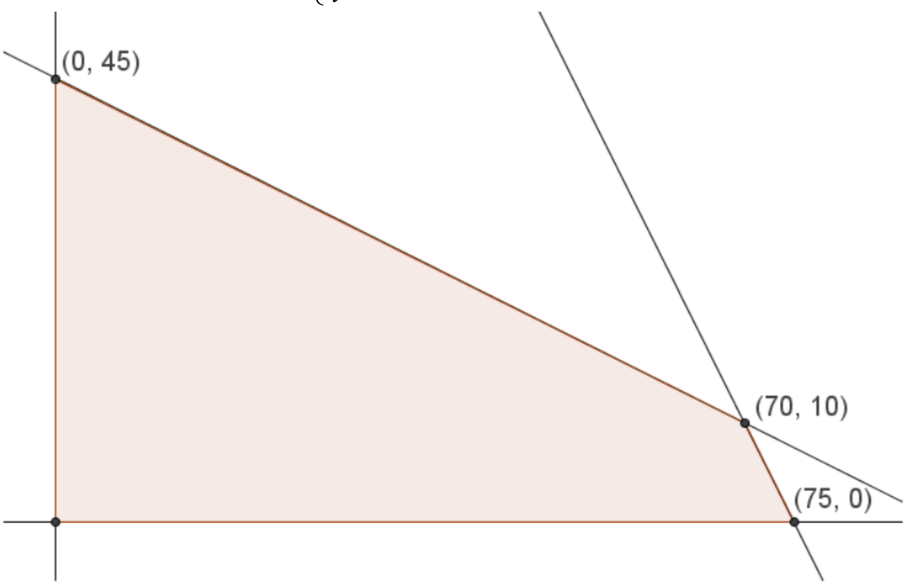
RECORDEU:
- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho amb més de dos.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

---

1. Una empresa fabrica dos tipus de gelats G1 i G2. En el procés d'elaboració utilitza dos tipus d'ingredients, A i B. Disposa de 90 kg de l'ingredient A i 150 kg de l'ingredient B. Per a fabricar una capsa de gelats del tipus G1, empra 1 kg de l'ingredient A i 2 kg de l'ingredient B. Per a fabricar una capsa de gelats del tipus G2, empra 2 kg de l'ingredient A i 1 kg de l'ingredient B. Si la capsa de gelats del tipus G1 es ven a 10 euros i la de tipus G2 es ven a 15 euros, quantes capses de gelat de cada tipus cal fabricar per a maximitzar els ingressos? *[2 punts]*

   Anomenem x la quantitat de capses de gelat del tipus G1 i y la quantitat de capses de gelat del tipus G2 que fabricarà l'empresa.
   L'enunciat del problema ens condueix a les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Els ingressos venen donats per la funció $f(x,y)=10x+15y$. Estudiem el valor que pren la funció objectiu en els vèrtexs de la regió factible:

vèrtexs	$f(x,y)=10x+15y$
$(0,0)$	$f(0,0)=0$
$(0,45)$	$f(0,45)=675$
$(75,0)$	$f(75,0)=750$
$(70,10)$	$f(70,10)=850$

La funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt $(70,10)$ i aquest màxim pren el valor 850. Així doncs, per a maximitzar els ingressos cal fabricar 70 capses de gelat del tipus G1 i 10 capses de gelat del tipus G2. Amb aquesta fabricació l'empresa aconseguirà 850 euros d'ingressos, que és el valor màxim.

Criteris de correcció: Determinació de les restriccions: 0,5 p. Determinació de la funció objectiu: 0,5 p. Determinació dels vèrtexs: 0,5 p. Determinació del màxim: 0,5 p.

---

2. Un gimnàs cobra una quota de 42 euros mensuals i té 2000 usuaris. Un estudi de mercat afirma que per cada euro que s'apuja (o s'abaixa) la quota es perden (o es guanyen) 20 usuaris.
   a) Expresseu el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota, tenint en compte que la relació entre les dues variables és lineal. Per a quin valor de la quota el gimnàs es quedaria sense usuaris? *[1 punt]*
   b) Determineu en quin preu cal fixar la quota per obtenir un benefici mensual màxim. Quin seria aquest benefici i quants usuaris tindria el gimnàs en aquest cas? *[1 punt]*

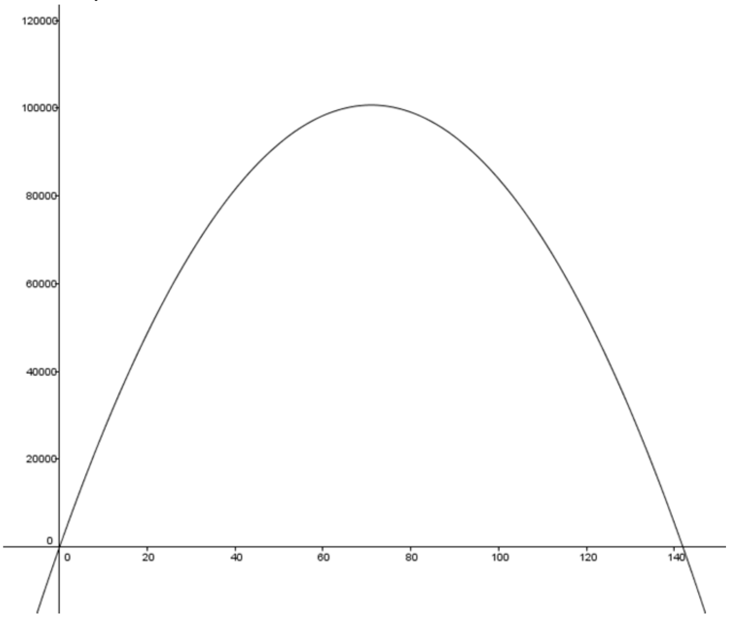
a) Denotem per x la quota del gimnàs i per $f(x)$ la funció que dona el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota. Sabem que $f(x)$ és una funció lineal de pendent -20 i que passa pel punt (42, 2.000), d'on es dedueix que $f(x) = 2.840 - 20x$. Per saber per a quin valor de quota el gimnàs es quedaria sense usuaris cal resoldre $f(x) = 0$, i s'obté $x = 142$. És a dir, a partir de 142 euros de quota el gimnàs no tindria cap usuari.

b) La funció que dona el benefici mensual en funció de la quota s'obté multiplicant el nombre d'usuaris per la quota que paguen:

$$B(x) = (2.840 - 20x) \cdot x = -20\,x^2 + 2.840\,x.$$

Ara hem de trobar el màxim de $B(x)$, que és un polinomi i, per tant, una funció contínua i derivable a tot el seu domini $[0,\infty)$. Derivant, obtenim $B'(x) = -40x + 2.840$, i igualant la derivada a zero s'obté com a solució $x = 71$. Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que $B'(x) > 0$ quan $x \in [0,71)$ i $B'(x) < 0$ quan $x > 71$.

Alternativament es pot representar la paràbola definida per $\mathrm{B(x)}$ i trobar el vèrtex per a obtenir el màxim:



El benefici mensual màxim que s'assoleix quan la quota és de 71 euros és de 100.820 euros i el gimnàs tindria 1.420 usuaris.

Criteris de correcció: a) Determinació de la funció que dona el nombre d'usuaris: 0,5 p. Determinació del valor de la quota pel qual el gimnàs es queda sense usuaris: 0,5 p. b) Determinació de la funció que dona els beneficis: 0,25 p. Determinació del màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Determinació del nombre d'usuaris en aquest cas: 0,25 p.

---

3. Considerem una funció $f(x)$ tal que la seva primera derivada és $f'(x) = x^2 + bx - 3$ en què b és un paràmetre real.
   a. Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -3$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. *[1 punt]*
   b. Per a $b = -8$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt $(0,2)$. *[1 punt]*

a) Sabem que en $x = -3$ hi ha un extrem relatiu, per tant $f'(-3) = 0$.

$f'(x) = x^2 + bx - 3 \rightarrow f'(-3) = (-3)^2 + b(-3) - 3 = 0 \rightarrow 9 - 3b - 3 = 0 \rightarrow \boxed{b = 2}$.

Per tant, $f'(x) = x^2 + 2x - 3$. Si estudiem on és positiva i on es negativa la funció $f'(x)$, obtenim que és positiva en els intervals $(-\infty,-3)$ i $(1,+\infty)$, mentre que és negativa en l'interval $(-3,1)$. Per tant, en $x = -3$ hi ha un màxim relatiu.

b) El pendent de la recta buscada serà $f'(0)$. Si $b = -8$, tenim $f'(x) = x^2 - 8x - 3$ $\Rightarrow f'(0) = -3$.

La recta tangent en aquest punt $(0,2)$ serà $y - 2 = -3(x - 0)$, o bé $\boxed{y = -3x + 2}$.

Criteris de correcció: a) Determinació del paràmetre b: 0,5 p. Identificació que es tracta d'un màxim: 0,5 p. b) Determinació del pendent: 0,5 p. Determinació de la recta tangent: 0,5 p.

4. Un grup inversor vol invertir 6.000 euros en lletres, bons i accions que tenen una rendibilitat del 10%, del 8% i del 4%, respectivament. Tenint en compte que vol obtenir una rendibilitat global del 7%:
   a. Trobeu la quantitat que ha d'invertir en lletres i en bons en funció de la quantitat invertida en accions. Quins valors pot prendre la quantitat invertida en accions sabent que les quantitats invertides en cadascun dels productes han de ser sempre més grans o iguals que zero? *[1 punt]*
   b. Quant ha d'invertir en cadascuna de les tres opcions si vol invertir en lletres tant com en els altres dos productes junts? *[1 punt]*

a) Anomenem x els euros invertits en lletres, y els euros invertits en bons i z els invertits en accions. Sabem que aquests productes tindran una rendibilitat del 10%, el 8% i el 4% respectivament. D'altra banda, si volem una rendibilitat global del 7%, tenim que el 7% de 6.000 euros = 420 euros.
Així doncs, tenim el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 6.000 \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}08 \cdot y + 0{,}04 \cdot z = 420 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 10 & 8 & 4 & 42.000 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 0 & 2 & 6 & 18.000 \end{pmatrix}$$

Tenim, per tant, un sistema compatible indeterminat que té per solucions en funció de z: $x = -3.000 + 2z$; $y = 9.000 - 3z$; $z = z$.
Per tal que la inversió no sigui mai negativa cal que
$x \geq 0 \rightarrow z \geq 1.500$; $y \geq 0 \rightarrow z \leq 3.000$; $z \geq 0$

Per tant, la inversió en accions ha d'estar en l'interval [1.500, 3.000].

b) Si addicionalment sabem que hem d'invertir en lletres tant com en els altres dos productes junts. Tenim el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + y + z = 6.000 \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}08 \cdot y + 0{,}04 \cdot z = 420 \\ x = y + z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 10 & 8 & 4 & 18.000 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 0 & 2 & 6 & 18.000 \\ 0 & 0 & 4 & 12.000 \end{pmatrix}$$

Per tant, la solució del sistema ve donada per $x = 3.000$, que són els euros que hem d'invertir en lletres, $y = 0$, no hem d'invertir res en bons i, finalment, $z = 3.000$, que són els euros que hem d'invertir en accions.

Criteris de correcció: a) Resolució del sistema: 0,5 p. Determinació de l'interval de les accions: 0,5 p. b) Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució del sistema: 0,5 p.

5. Considereu la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

   a. Comproveu que $\mathbf{A}^3 - \mathbf{I} = 0$, en què $\mathbf{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2. *[1 punt]*
   b. Calculeu $\boldsymbol{A}^{11}$ utilitzant la informació de l'apartat *a*. *[1 punt]*

a. Calculem la matriu A^3 i comprovem que efectivament dona la matriu identitat:
$\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
b. Utilitzant l'apartat anterior tenim que
$\mathrm{A}^{11} = \mathrm{A}^3 \cdot \mathrm{A}^3 \cdot \mathrm{A}^3 \cdot \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la matriu A^3i verificació de la condició: 1 p. b) Raonament de com utilitzar la relació de l'apartat anterior: 0,5 p. Càlcul de la matriu A^{11}: 0,5 p.

6. El vèrtex d'una paràbola és el punt (1,2).
   a. Si la paràbola talla l'eix de les abscisses pel punt $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, quin serà l'altre punt de tall de la paràbola amb l'eix de les abscisses? *[1 punt]*
   b. Trobeu l'equació de la paràbola. *[1 punt]*

a) L'altre punt de tall de la paràbola a l'eix d'abscisses és $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, ja que $x = 1$ és l'eix de simetria.
b) L'equació de la paràbola és de la forma $f(x) = a \cdot x^2 + \mathrm{b} \cdot x + \mathrm{c}$. Com que té el vèrtex en el punt (1,2) sabem que d'una banda $a + \mathrm{b} + \mathrm{c} = 2$ i, d'altra banda, la derivada ha de ser igual a zero en aquest punt. Com que $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ obtenim que $2 \cdot a + b = 0$. També sabem que passa pel punt $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, per tant, $a \cdot \frac{1}{4} - \mathrm{b} \cdot \frac{1}{2} + \mathrm{c} = 0$. Resolent el sistema trobem que $a = -\frac{8}{9}$, $\mathrm{b} = \frac{16}{9}$ i $\mathrm{c} = \frac{10}{9}$.
Per tant, l'equació de la paràbola és $f(x) = -\frac{8}{9} \cdot x^2 + \frac{16}{9} \cdot x + \frac{10}{9}$.

També és correcte l'exercici si primer troben l'equació de la paràbola i després calculen l'altre punt de tall amb l'eix de les abscisses.

Criteris de correcció: a) Trobar l'altre punt de tall: 1 p. b) Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució i determinació de la paràbola: 0,5 p.