Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i després arrodonir la suma).
Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar ni donar la *millor solució* a cada pregunta. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i sentit comú.

Qüestions

1. *Calculeu les equacions de les dues rectes del pla que passen pel punt* $P = (1, -1)$ *i que són tangents a la corba d'equació* $y = (x-1)^2$.

Els punts del gràfic de $y = (x-1)^2$ són de la forma $Q = (x, (x-1)^2)$. El pendent de la recta tangent en cada un d'aquests punts val $y'(x) = 2(x-1)$. El pendent de la recta que uneix P amb un d'aquests punts Q serà $m(x) = \dfrac{(x-1)^2+1}{x-1}$. Si es vol que una de les rectes PQ sigui tangent al gràfic de $y = (x-1)^2$ s'ha de complir l'equació

$$2(x-1) = \frac{(x-1)^2+1}{x-1}$$

que té com a úniques solucions: a) $x = 0$ i b) $x = 2$. En el cas a) el pendent de la recta ha de ser $y'(0) = -2$ i en el cas b) és $y'(2) = 2$. Les rectes corresponents, que passen per P i tenen pendents 2 i -2, tindran com a equacions

$$(y+1) = -2(x-1) \qquad (y+1) = 2(x-1)$$

Compteu fins a un punt i mig (1.5) pel plantejament correcte de l'exercici i deixeu el mig punt restant (0.5) pels càlculs finals.

---

2. *Calculeu*

$$\int_1^e \frac{2\ln^3(x)}{x}\,dx.$$

Fent el canvi immediat $t = \ln(x)$ la integral es converteix en $\displaystyle\int_0^1 2t^3\,dt$ que val $\dfrac{1}{2}$.

Compteu fins a un punt (1) pel càlcul correcte de la primitiva i un punt més (1) pel càlcul final.

---

3. *Considereu el punt* $P = (5, -2, 9)$ *i la recta* $r : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{6}$

a) *Calculeu l'equació de la recta s que talla perpendicularment a r i que passa per P.*

b) *Calculeu el punt de tall T entre les rectes r i s.*

Els dos apartats es poden repondre al mateix temps.

Els punts Q de la recta r són de la forma

$$Q = (1 - 2\lambda, -1 - 3\lambda, 6\lambda)$$

ja que aquesta recta és la que passa per $(1, -1, 0)$ i té per vector director $\vec{v} = (-2, -3, 6)$. El punt T que es vol obtenir serà el que compleixi que els vectors $\vec{PT}$ i $\vec{v}$ siguin perpendiculars. Com que per a cada un dels punts Q tenim

$$\vec{PQ} = (-4 - 2\lambda, 1 - 3\lambda, -9 + 6\lambda)$$

la condició de perpendicularitat s'expressarà com

$$0 = (-2) \times (-4 - 2\lambda) + (-3) \times (1 - 3\lambda) + 6 \times (-9 + 6\lambda) = -49 + 49\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Amb $\lambda = 1$ obtenim $T = (-1, -4, 6)$, $\vec{PT} = (-6, -2, -3)$ i l'equació de la recta perpendicular serà

$$\frac{x+1}{-6} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-6}{-3}$$

També es pot obtenir el punt T com el punt d'intersecció de la recta r amb el pla perpendicular a r i que passa per P que seria el que té per equació $-2x - 3y + 6z = 50$.

Compteu un punt per cada apartat i valoreu sobretot el plantejament de l'exercici. No treieu més de mig punt (0.5) per errors en els càlculs.

---

4. *Per a quin o quins valors del paràmetre real λ el sistema d'equacions*

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + (\lambda + 2)z &= 0 \\ x + (2\lambda)y + 3z &= 9 \\ 2x - z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

és compatible i indeterminat?

El determinant de la matriu de coeficients del sistema d'equacions val, per a cada λ,

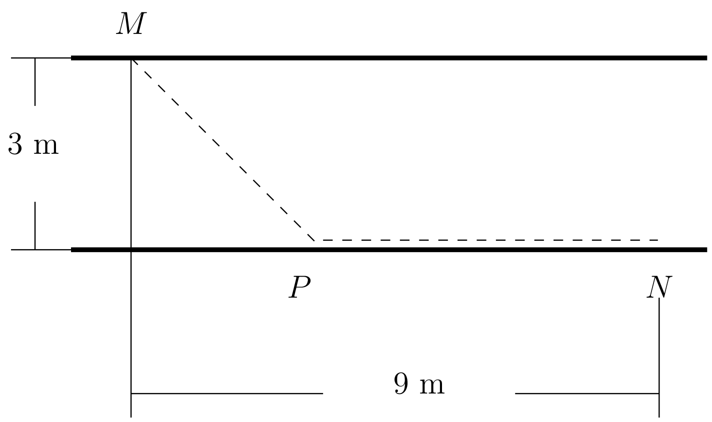
$$-10\lambda + 14 - 4\lambda^2$$

Aquest determinant només s'anul·la per a $\lambda = 1$ o per a $\lambda = -7/2$. En el cas que $\lambda = 1$ surt un sistema incompatible, en el cas que $\lambda = -7/2$ el sistema és compatible i indeterminat, en tots els altres casos el sistema és compatible determinat.

En aquest exercici valoreu sobretot el coneixement que l'alumne demostri de la resolució de sistemes d'equacions lineals més que el resultat final correcte. Per errors en els càlculs, si la discussió que es fa és coherent amb els resultats obtinguts, no treieu més de mig punt (0.5).

Problemes

1. *Volem unir el punt M en un cantó d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt N situat a l'altre cantó de carrer, i 9 m més avall, mitjançant dos cables rectes, un des de M fins a un punt P de l'altre cantó del carrer i un altre des de P fins a N seguint en el mateix cantó de carrer segons l'esquema següent*



El cost de la instal·lació del cable MP és de 12 € per metre i del cable PN de 6 € per metre.

Quin punt P haurem d'escollir de manera que la connexió de M amb N sigui el més econòmica possible? Quin serà aquest cost mínim?

Si x és la distància entre el punt O just davant de M fins al punt P, la distància entre M i P serà

$$MP = \sqrt{9 + x^2}$$

mentre que la distància de P a N és

$$PN = (9 - x)$$

Aleshores, el cost $C(x)$ de la instal·lació resulta

$$C(x) = 12\sqrt{9 + x^2} + 6(9 - x)$$

La derivada d'aquest funció es pot escriure com

$$C'(x) = \frac{12x}{\sqrt{9+x^2}} - 6$$

Que val 0 només quan $x = \sqrt{3}$. Això diu que el punt P ha de ser el que està a $\sqrt{3}$ metres de O.

El cost corresponent serà $C(\sqrt{3}) \sim 85.17691454$ €

Compteu fins a dos punts (2) per l'expressió de la funció que expressa el cost i el càlcul de la seva derivada. Compteu fins a dos punts més (2) per la determinació del mínim, del punt P i l'avaluació del cost mínim. Encara que l'expressió de la funció que determina el cost no sigui correcta, valoreu el coneixement de les tècniques per a determinar el extrems locals d'una funció que l'alumne demostri. Per errors púrament de càlcul no treieu més d'un punt (1) del total de quatre.

---

2. *D'un triangle sabem que la suma de les longituds de dos costats a i b és de 11 m., que l'angle C oposat al tercer costat val 30° i que l'àrea és de 7 m^2. Calculeu*

a) *La longitud de cada un dels costats del triangle.*

b) *Els angles del triangle.*

---

a) En primer lloc s'ha de tenir en compte que tenim $a+b=11$. Si designem per h l'altura sobre el costat a es compleix $h = b \times \sin(30^o) = \frac{b}{2} = \frac{(11-a)}{2}$ de forma que la condició sobre l'àrea del triangle, que es posarà inicialment com $\frac{(a \times h)}{2} = 7$ dóna finalment

$$a^2 - 11a + 28 = 0$$

que té com a solucions $a = 7$ i $a = 4$. Totes dues solucions són equivalents intercanviant els papers de a i b de forma que triarem $a = 7$ i $b = 4$. El tercer costat c es pot obtenir aplicant el teorema del cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos(30^o) \Leftrightarrow c = \sqrt{65 - 28\sqrt{3}} \sim 4.062336443 \text{ m}$$

b) Si es designa per α l'angle entre els costats b i c el teorema del cosinus també dóna:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \times b \times c} \sim -0.5076334412$$

de forma que $\alpha \sim 120.5063226^o$. L'angle que resta serà

$$\beta = 180^o - 30^o - \alpha \sim 29.49367736^o$$

Compteu dos punts (2) per cada apartat i intenteu-los puntuar de forma independent. Valoreu sobretot el coneixement que l'alumne demostri de les tècniques de resolució de triangles i no descompteu més d'un punt (1) del total de quatre per errors en els càlculs.