SÈRIE 2

1.- Trobeu les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{3x^3-5x-2}{x^2-4x-5}$ **.**

[2 punts]

Solució

Comencem buscant les asímptotes verticals. Per fer-ho, igualem el denominador de la funció a zero i resolem l'equació resultant.

$$x^2-4x-5=0 \iff x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-5)}}{2}=\frac{4\pm 6}{2} \iff x=5 \ \text{ o } \ x=-1\,.$$

Això ens indica que les possibles asímptotes verticals són $x=5$ i $x=-1$. Comprovem si ho són o no.

- $\displaystyle \lim_{x\to 5^-}\frac{3x^3-5x-2}{x^2-4x-5}=\frac{348}{0^-}=-\infty\ ;\quad \lim_{x\to 5^+}\frac{3x^3-5x-2}{x^2-4x-5}=\frac{348}{0^+}=+\infty\,.$
- $\displaystyle \lim_{x\to -1}\frac{3x^3-5x-2}{x^2-4x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(3x^2-3x-2)}{(x+1)(x-5)}=-\frac{2}{3}\,.$

O sigui, la funció té una sola asímptota vertical, $x=5$.

Com que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x-2}{x^2-4x-5}=\infty$ (ja que el grau del numerador és superior al grau del denominador), la funció no té asímptotes horitzontals.

Finalment, busquem si la funció té asímptotes obliqües. Recordem que són de la forma $y=mx+n$ on $m=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $n=\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-m\cdot x)$. En el nostre cas,

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x-2}{x^3-4x^2-5x}=3 \quad \text{i} \quad n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-5x-2}{x^2-4x-5}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+10x-2}{x^2-4x-5}=12\,.$$

L'asímptota oblíqua és $y=3x+12$.

2.- Donats el pla $\pi: 5x+y+3z=4$ ***i la recta*** $r:\begin{cases} ax-y=2\\ 2y+z=-3\end{cases}$***, estudieu-ne la posició relativa en funció del paràmetre*** a***.***

[2 punts]

Solució

Un pla i una recta a l'espai $\mathbb{R}^3$ poden ser paral·lels, es poden tallar o la recta pot estar continguda al pla. Per començar a esbrinar-ho en el nostre cas, busquem el vector normal del pla, al que anomenarem v_π, i el director de la recta, v_r.

$$v_\pi=(5,1,3)\ ;\quad v_r=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1,-a,2a)\,.$$

La recta i el pla es tallen si v_π i v_r no són perpendiculars, és a dir, si $v_\pi\cdot v_r\neq 0$.

$$v_\pi\cdot v_r=(5,1,3)\cdot(-1,-a,2a)=-5-a+6a=5a-5\neq 0 \iff a\neq 1\,.$$

També podrien comprovar si el vector director de la recta és o no combinació lineal dels vectors generadors del pla. Per trobar aquests vectors podem fer

$$5x+y+3z=4 \iff y=4-5x-3z \iff \begin{cases} x=\lambda\\ y=4-5\lambda-3\mu\\ z=\mu\end{cases}$$

Podem agafar $v_1 = (1, -5, 0)$ i $v_2 = (0, -3, 1)$. Llavors,

$$(-1, -a, 2a) = \alpha(1, -5, 0) + \beta(0, -3, 1) \iff \alpha = -1\ , \quad -5\alpha - 3\beta = -a \quad \beta = 2a \Longrightarrow a = 1\,.$$

D'una manera o una altra, per $a \neq 1$ la recta i el pla es tallen.

Quan $a = 1$ encara tenim dues possibilitats: paral·lels o la recta continguda al pla. Per acabar d'estudiar-ho, busquem un punt de la recta; per exemple, fent $y = 0$ queda $x = 2$ i $z = -3$, aconseguint el punt $P = (2, 0, -3)$. Mirem si aquest punt pertany o no al pla π,

$$5 \cdot 2 + 0 + 3 \cdot (-3) = 1 \neq 4\,.$$

O sigui, $P \notin \pi$. Per a $a = 1$, la recta i el pla són paral·lels.

Una forma diferent de resoldre el problema és estudiar el caràcter del sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & y & + & 3z & = & 4 \\ ax & - & y & & & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & -3 \end{array}\right\}\,.$$

Comprovem quin és el rang de la matriu del sistema, A, calculant el seu determinant (que existeix per ser una matriu quadrada).

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 6a - (0 + 0 + a) = 5a - 5\,.$$

Si $5a - 5 \neq 0$ (és a dir, si $a \neq 1$) tenim que rang $A =$ rang $(A|b) = 3$, on $(A|b)$ representa la matriu ampliada del sistema. El sistema és compatible determinat. D'aquí, el pla i la recta es tallen.

Si $a = 1$, calculem el rang de les dues matrius alhora,

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & | & 4 \\ 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 6 & 3 & | & -6 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, rang $A = 2$ i rang $(A|b) = 3$. El sistema és incompatible i, per tant, la recta i el pla són paral·lels.

3.- Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum V fixat. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y a la seva altura. Es demana:

(a) ***Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.***

(b) ***Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

Amb les notacions de l'enunciat,

$$V = x^2 y\ ; \quad A = 2x^2 + 4xy\ .$$

Aïllant el valor de la variable y de l'expressió del volum, $y = V/x^2$. Substituint aquest valor a l'expressió que ens dóna l'àrea obtenim

$$A = 2x^2 + 4x\frac{V}{x^2} = 2x^2 + \frac{4V}{x}\ .$$

Per trobar el valor mínim de l'àrea, derivem aquesta expressió respecte de x i la igualem a zero.

$$A' = 4x - \frac{4V}{x^2}\ ; \quad A' = 0 \iff 4x^3 - 4V = 0 \iff x = \sqrt[3]{V}\ .$$

D'aquí $y = \dfrac{V}{x^2} = \dfrac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{V^3}{V^2}} = \sqrt[3]{V}$. En definitiva, $y = x$ i el prisma és un cub.

Per comprovar que es tracta realment d'un mínim, cal trobar la segona derivada de la funció àrea i veure quin signe té per al valor $x = \sqrt[3]{V}$:

$$A'' = 4 + \frac{8V}{x^3} \Longrightarrow A''(\sqrt[3]{V}) > 0 \ .$$

4.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$**.**

(a) ***Comproveu que compleix la igualtat*** $A^2 - 5A = I_2$***, on*** I_2 ***és la matriu identitat d'ordre 2.***

(b) ***Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de*** A***.***

(c) ***Resoleu l'equació matricial*** $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$***, utilitzant la matriu inversa de*** A ***.***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,75 punts per l'apartat b; 0,75 punts per l'apartat c]

Solució

(a) En primer lloc, realitzem els càlculs indicats,

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 35 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 35 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \, ,$$

tal com volíem.

(b) Per calcular la matriu inversa de A, cal treure factor comú al membre esquerra de la igualtat donada, $A^2 - 5A = I_2 \iff A(A - 5I_2) = I_2$. Recordant que la matriu inversa de A és aquella que multiplicada per ella dóna la identitat, podem assegurar que

$$A^{-1} = A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} .$$

(c) Tenim que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \iff X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} .$$

5.- Sigui $f(x) = \dfrac{8x^2}{2x+1}$***. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix*** OX ***i les rectes*** $x = 0$ ***i*** $x = 2$ ***.***

[2 punts]

Solució

La funció solament val zero quan $x = 0$. Per tant, l'àrea demanada és $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$. La funció a integrar és una funció racional amb el grau del numerador major que el denominador. Per tant, haurem de començar efectuant la divisió. Ens queda

$$\frac{8x^2}{2x+1} = 4x - 2 + \frac{2}{2x+1} \, .$$

Llavors,

$$\int_0^2 \frac{8x^2}{2x+1}dx = \int_0^2 \left(4x - 2 + \frac{2}{2x+1}\right) dx = \Big[2x^2 - 2x + \ln|2x+1|\Big]_0^2$$

$$= [2\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + \ln(2\cdot 2+1)] - [0-0+\ln(0+1)] = 4+\ln 5 \simeq 5{,}60944\,.$$

6.- Considereu la recta $r : \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-1}{-1} = z-1$ **.**

(a) **Trobeu els dos punts,** A **i** B**, de la recta** r **que estan situats a una distància** $d=\sqrt{6}$ **del punt** $P=(-1,1,2)$**.**

(b) **Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs** A**,** B **i** P**.**

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Els punts de la recta r són de la forma $Q=(x,y,z)=(-4-2t,1-t,1+t)$. La distància d'un d'ells al punt P és

$$d(Q,P)=\sqrt{[-1-(-4-2t)]^2+[1-(1-t)]^2+[2-(1+t)]^2}=\sqrt{10+10t+6t^2}\,.$$

Se'ns demana que $d(Q,P)=\sqrt{6}$. Per tant, l'equació a resoldre és $10+10t+6t^2=6$, que té per solucions $t=-1$ i $t=-2/3$. El punts buscats són $A=(-2,2,0)$ i $B=(-8/3,5/3,1/3)$.

(b) L'àrea del triangle amb vèrtex A, B i P es pot trobar utilitzant la fórmula

$$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\|=\frac{1}{2}\|(A-P)\times(B-P)\|\,.$$

Com que $A-P=(-2,2,0)-(-1,1,2)=(-1,1,-2)$ i $B-P=(-8/3,5/3,1/3)-(-1,1,2)=(-5/3,2/3,-5/3)$, tenim que

$$(A-P)\times(B-P)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & -2\\ -5/3 & 2/3 & -5/3\end{vmatrix}=(-1/3,5/3,1)\,.$$

En definitiva,

$$S=\frac{1}{2}\|(-1/3,5/3,1)\|=\frac{\sqrt{35}}{}$$

$$\frac{\overline{6}}{3}\;;\quad d(P,r)=\frac{\|\overrightarrow{RP}\times v_r\|}{\|v_r\|}=\sqrt{\frac{35}{6}}\,,$$

essent $R=(-4,1,1)$ un punt de la recta r. Llavors, $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{35}{6}}=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$.

Encara hi ha una altra forma de resolució: la fórmula de Heró,

$$S=\sqrt{m(m-a)(m-b)(m-c)}\,,$$

on m és el semiperímetre del triangle i a, b i c les longituds dels costats. En el nostre cas,

$$m=\frac{d(A,P)+d(B,P)+d(A,B)}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}\,.$$

Per tant,

$$S=\sqrt{\frac{7\sqrt{6}}{6}\left(\frac{7\sqrt{6}}{6}-\sqrt{6}\right)\left(\frac{7\sqrt{6}}{6}-\sqrt{6}\right)\left(\frac{7\sqrt{6}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}=\frac{\sqrt{35}}{6}\,.$$