SÈRIE 1

1.- Sigui $V = \{(-1,1,1),(-2,-1,0),(1,2,a)\}$ ***un conjunt de vectors de*** $\mathbb{R}^3$***.***

(a) **Trobeu el valor o valors de a perquè V sigui linealment dependent.**

(b) **Quan $a = 4$, expresseu el vector $\vec{v} = (3,9,14)$ com a combinació lineal dels vectors de V.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Hi ha diferents formes de comprovar la dependència lineal de V. Per exemple, podem calcular el determinant de la matriu formada pels tres vectors,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \det A = 3a - 3\,.$$

Aquest determinant val zero si i sol el conjunt V és linealment dependent. Com que l'equació $3a-3=0$ té per solució $a = 1$, aquest és el valor demanat.

Podem buscar també el rang de la matriu A, que haurà de ser menor que 3 si volem que el conjunt V sigui linealment dependent

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Les transformacions elementals realitzades han estat: (1) $F_2 + F_1$ i $F_3 + F_1$; (2) $F_2/3$ (3) $F_3 - 2F_2$.

El rang de la matriu A és diferent de tres si i sol si $a = 1$.

Un altre camí de resolució és utilitzar directament la definició de conjunt linealment dependent. Cal plantejar l'equació vectorial

$$\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) + \gamma(1,2,a) = (0,0,0).$$

Si podem trobar valors per a les variables α, β i γ que no siguin tots nuls, el conjunt V serà linealment dependent. Ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma \ = 0 \\ \alpha + a\gamma \quad = 0 \end{array}\right\}$$

De la tercera equació en traiem que $\alpha = -a\gamma$. Portant aquest valor a les altres dues,

$$\left.\begin{array}{r} -2\beta + (a+1)\gamma = 0 \\ -\beta + (2-a)\gamma \ = 0 \end{array}\right\}$$

Aïllant el valor de β a la segona d'aquestes equacions i substituint-lo a la primera obtenim $(-3+3a)\gamma = 0$. Com que volem que $\gamma \neq 0$ (si aquesta variable fos nul·la també ho serien les altres dues), necessitem que $-3 + 3a = 0$; és a dir, $a = 1$.

La qüestió es pot resoldre també buscant el valor del paràmetre a perquè el tercer vector sigui combinació lineal dels altres dos (amb la qual cosa el conjunt V seria linealment dependent).

$$\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) = (1,2,a) \Longrightarrow \alpha = 1\,,\ \beta = -1\,,\ a = 1\,.$$

(b) Plantegem l'equació vectorial $\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) + \gamma(1,2,4) = (3,9,14)$, que ens porta al sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{r} -\alpha - 2\beta + \gamma = \ 3 \\ \alpha - \beta + 2\gamma \ = \ 9 \\ \alpha + 4\gamma \quad = 14 \end{array}\right\},$$

Aquest sistema té per solució $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$. Per tant, la resposta a aquest apartat és

$$\vec{v} = 2(-1,1,1) - (-2,-1,0) + 3(1,2,4)\,.$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat (a)

0,5 punts per plantejar qualsevol dels mètodes descrits (o per un altre si és correcte).

0,5 punts per arribar al valor de $a = 1$.

Apartat (b)

0,5 punts pel planteig de l'equació vectorial a resoldre o si escriuen directament el sistema d'equacions lineals.

0,25 punts per trobar el valor dels coeficients.

0,25 punts per posar el vector $\vec{v}$ igual a la combinació lineal dels vectors de V.

2.- De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ ***sabem que***

- ***té un extrem relatiu en el punt d'abscissa*** $x = -3$***.***
- ***la integral definida en l'interval*** $[0,1]$ ***val*** $-\dfrac{5}{4}$***.***

Calculeu el valor dels paràmetres a ***i*** b***.***

[2 punts]

Solució

Si la funció té un extrem relatiu en el punt on $x = -3$ sabem que $P'(-3) = 0$. Com que $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, ens queda l'equació

$$3(-3)^2 + 2a(-3) + b = 0\,.$$

Per altra banda, tenim que

$$\int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 = -\frac{5}{4}\,.$$

En definitiva, hem obtingut el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -6a + b & = & -27 \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} & = & -\dfrac{7}{2} \end{array}\right\}\,,$$

que té per solució $a = 3$ i $b = -9$.

PAUTES DE CORRECCIÓ

0,5 punts per saber interpretar la condició per tenir un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$.

0,25 punts pel planteig de la integral.

0,5 punts pel càlcul de la primitiva.

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow, arribant a la segona equació.

0,5 punts per la resolució del sistema.

3.- Donats el pla $\pi\colon x+2y-z=3$ ***i la recta*** $r\colon \dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+m}{4}$ ***,***

(a) ***Comproveu que el vector característic (o normal) de*** π ***i el vector director de*** r ***són perpendiculars.***

(b) ***Estudieu la posició relativa de*** π ***i*** r ***en funció del paràmetre*** m***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector característic del pla és $v_\pi=(1,2,-1)$; el vector director de la recta és $v_r=(2,1,4)$. Aquests vectors seran perpendiculars si i sol si el seu producte escalar és nul.

$$(1,2,-1)\cdot(2,1,4)=1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 4=2+2-4=0\,,$$

(b) Tenint en compte l'apartat anterior, la recta i el pla solament poden ser paral·lels o incidents (la recta està continguda dins del pla). En aquest segon cas, qualsevol punt de la recta ha de complir l'equació del pla. Agafem el punt $P=(1,0,-m)$; aquest punt pertany al pla si i sol si $1+2\cdot 0-(-m)=3$; és a dir, si i sol si $m=2$.

En definitiva, si $m=2$, la recta està continguda al pla; si $m\neq 2$, la recta i el pla són paral·lels.

Pautes de Correcció

Apartat a

0,5 punts per localitzar el vector característic del pla i el director de la recta.

0,25 punts per efectuar el producte escalar.

0,25 punts per concloure que són perpendiculars perquè el seu producte escalar val zero.

Apartat b

0,5 punts per raonar, a la vista del resultat anterior, que el pla i la recta solament poden ser paral·lels o incidents (recta continguda al pla).

0,25 punts per raonar que, si són incidents, qualsevol punt de la recta ha de ser del pla.

0,25 punts per arribar al valor $m=2$ i discutir quina és la posició relativa en funció de m.

4.- Siguin les matrius $A=\begin{bmatrix}2&a&1\\1&b&4\\3&c&5\end{bmatrix}$***,*** $B=\begin{bmatrix}5&b&8\\1&c&3\\4&a&3\end{bmatrix}$ ***i*** $C=\begin{bmatrix}2&4&7\\-1&5&5\\-b&-a&-2\end{bmatrix}$***, on*** a***,*** b ***i*** c ***són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.***

[2 punts]

Solució

Una matriu quadrada no té inversa si i sol si el seu determinant val zero. Tenim

$$\det A=7a+7b-7c\,;\qquad \det B=-7a+9b-17c\,;\qquad \det C=17a+15b-28\,.$$

Les tres matrius seran no invertibles quan el valor de cada paràmetre sigui la solució del sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 7a & + & 7b & - & 7c & = & 0 \\ -7a & + & 9b & - & 17c & = & 0 \\ 17a & + & 15b & & & = & 28 \end{array}\right\} ,$$

és a dir, quan $a = -1$, $b = 3$ i $c = 2$.

Pautes de Correcció

0,25 punts per raonar que els determinants han de ser nuls.

0,25 punts pel càlcul de cada un dels determinants ($3 \times 0,25 = 0,75$).

0,5 punts per la construcció del sistema.

0,5 punts per la seva resolució.

5.- Donats el pla $\pi : 2x - y + 3z - 8 = 0$ i el punt $P = (6, -3, 7)$,

(a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per P i és perpendicular a π.

(b) Trobeu el punt del pla π que està més proper al punt P.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Podem agafar com a vector director de la recta que busquem el vector característic del pla π; llavors, l'equació contínua de la recta és

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3} .$$

(b) El punt del pla més proper al punt P és el que es troba a la recta perpendicular al pla passant per P. Així, el punt que estem buscant és la solució de les equacions

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3}, \quad \text{juntament amb} \quad 2x - y + 3z - 8 = 0 .$$

Hi ha vàries formes de resoldre el sistema. Una d'elles és convertint l'equació contínua de la recta en dues equacions,

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} \Longrightarrow x + 2y = 0 ; \qquad \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3} \Longrightarrow 3y + z = -2 .$$

Ajuntant aquestes dues equacions amb la del pla ens queda un sistema,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 8 \end{array}\right\} ,$$

que té per solució $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

Una altra forma és passar l'equació de la recta a la forma paramètrica,

$$x = 6 + 2\lambda \ , \quad y = -3 - \lambda \ , \quad z = 7 + 3\lambda \ ,$$

i substituir aquests valors a l'equació del pla,

$$2x - y + 3z - 8 = 0 \Longrightarrow 2(6 + 2\lambda) - (-3 - \lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow 14\lambda + 28 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \,.$$

Les coordenades del punt són $x = 6 + 2(-2) = 2$, $y = -3 - (-2) = -1$, $z = 7 + 3(-2) = 1$.

D'una manera o altra, el punt buscat és $Q = (2, -1, 1)$.

Pautes de Correcció

Apartat a

0,5 punts per raonar que podem agafar com a vector director de la recta el vector característic del pla.

0,5 punts per l'equació en forma contínua de la recta. Encara que és difícil que ho facin, si donen com a solució qualsevol altra forma de l'equació de la recta, compteu solament 0,25 punts.

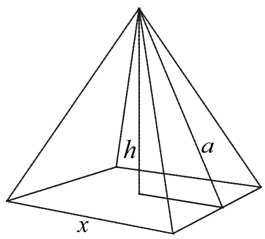
Apartat b

0,5 punts per raonar que el punt buscat és la intersecció entre el pla π i la recta trobada a l'apartat anterior.

0,5 punts per trobar el punt més proper.

Si es "llancen" a fer el punt d'intersecció sense explicar el perquè, no compteu res d'aquest apartat. La raó és que es demana el punt més proper, no el punt d'intersecció.

6.-Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de $300\,m^2$ ***de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem*** x ***la longitud d'un costat de la base de la tenda.***



(a) ***Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,***

$$V(x) = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6} \,.$$

(b) ***Determineu el valor de*** x ***perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Anomenem a a l'altura d'una de les cares de la tenda, tal com està indicat al dibuix. Llavors, la superfície total de les quatre cares de la tenda és $S(x) = 4\left(\dfrac{ax}{2}\right) = 2ax$. Com que aquesta superfície és de $300\,m^2$, tenim que $2ax = 300$, és a dir, $a = \dfrac{150}{x}$.

Per altra banda, d'acord amb el teorema de Pitàgores, $a^2 = h^2 + (x/2)^2$. Per tant,

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{150}{x}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{2x} .$$

Amb això,

$$V(x) = \frac{1}{3} x^2 h = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6} .$$

(b) Per a determinar el valor de x que fa màxim el volum, hem de derivar la funció volum i determinar els punts on la derivada s'anul·li.

$$V'(x) = \frac{1}{6}\left[\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4} + \frac{x}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}\left(-4x^3\right)\right] = \frac{3 \cdot 10^4 - x^4}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}} .$$

Aquesta derivada val zero quan $x = \sqrt[4]{3 \cdot 10^4} = 10\sqrt[4]{3} \simeq 13,1607$.

També es pot treballar amb la funció $f(x) = x^2(9 \cdot 10^4 - x^4)$, resultat d'haver descartat els factors constants i haver elevat al quadrat la funció volum. Amb ella,

$$f'(x) = 18 \cdot 10^4 x - 6x^5 \; ; \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\text{ o } x = 10\sqrt[4]{3} .$$

La primera d'aquestes solucions és absurda (si $x = 0$ no hi ha tenda) i la segona és la resposta correcta.

Pautes de Correcció

Apartat a

0,25 punts per la relació $2ax = 300$.

0,25 punts per la relació entre h, a i x.

0,25 punts per trobar el valor de h en funció de x.

0,25 punts per l'expressió definitiva de la funció volum.

Apartat b

0,5 punts pel càlcul de la derivada, tant si treballen amb $V(x)$ o amb la funció "quadrat", $f(x)$.

0,5 punts per trobar el valor de x.