SÈRIE 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix},$$

per a $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu *M* en funció dels valors del paràmetre *a*.
[1 punt]

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre *a*.
[1 punt]

Resolució:

a) Per a calcular el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ aplicarem transformacions elementals per a triangular la matriu (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (a+1)^2-a^2 \\ 0 & -1 & (a-1)^2-a^2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vegada hem fet les següents transformacions:

(1) A la segona fila restar-li la primera
A la tercera fila restar-li la primera

(2) Operar a les files segona i tercera

(3) A la tercera fila sumar-li la segona

Per tant, podem veure que independentment del valor de a, la matriu M és sempre equivalent amb una de triangular amb tres files no nul·les i per tant $rang(M) = 3$.

b) El sistema $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ té per matriu associada la matriu *M*, quadrada i de rang màxim i igual al nombre d'incògnites. Per tant, per a qualsevol valor del paràmetre a el sistema serà compatible determinat, amb solució única. La solució la podem obtenir aplicant el mètode de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 1, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & (a+1)^2 \\ 1 & 1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0.$$

Per a qualsevol valor de a la solució del sistema és $\boxed{x = 1, y = 0,\ z = 0}$.

Observació: A la resolució de l'apartat ***b)*** també es podia haver fet servir el mètode de Gauss de manera anàloga al que s'ha fet per a l'apartat ***a)***.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel primer pas de triangulació.

0,25 punts pel segon pas de triangulació.

0,25 punts pel tercer pas de triangulació.

0,25 punts per l'argumentació i resposta final.

Apartat b)

0,5 punts per la discussió del sistema.

0,25 punts per la formulació del mètode de Cramer.

0,25 punts pels càlculs i solució final.

Observació: Les resolucions correctes via menors no nuls o bé per Gauss, allà on sigui possible, seran valorades amb la totalitat de la puntuació.

2. Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

Resolució:

a) Per a fer el simètric respecte de la recta r construirem primer el pla, diguem-ne π', que talla perpendicularment la recta r i que passa pel punt A. Aquest pla té per vector normal el vector director de r, és a dir $(1,0,-1)$.

Per tant és un pla d'equació $x - z = D$ i si ha de passar per A, tindrem $1 - 3 = D$, o sigui $D = -2$. Per tant el pla perpendicular té equació $\pi': x - z = -2$.

Calculem el punt intersecció, diguem-ne B, del pla amb la recta, el que seria el punt projecció del punt A sobre la recta r, substituint l'equació paràmetrica de la recta en l'equació del pla.

$$3 + \lambda - (3 - \lambda) = -2$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (2,1,4)$.

Així el punt simètric del punt A respecte de la recta, diguem-ne A', l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((2,1,4) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (2,-2,2) = \boxed{(3,0,5)}$.

b) Obtindrem primer el punt, diguem-ne B, projecció perpendicular del punt A sobre el pla π, construint la recta perpendicular al pla i que passa per A. El vector director d'aquesta recta serà el vector normal del pla, és a dir $(1,1,1)$.

Per tant, l'equació de la recta serà $s: (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$.
La intersecció de s i π és quan

$$1 + \lambda + 2 + \lambda + 3 + \lambda = 3.$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (0,1,2)$.

Així el punt simètric del punt A respecte del pla, diguem-ne A', l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((0,1,2) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (-2,-2,-2) = \boxed{(-1,0,1)}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per identificar el vector director de la recta.

0,25 punts per l'equació del pla perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts per la construcció del punt simètric.

Apartat b)

0,25 punts per identificar el vector normal del pla.

0,25 punts per l'equació de la recta perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts per la construcció del punt simètric.

---

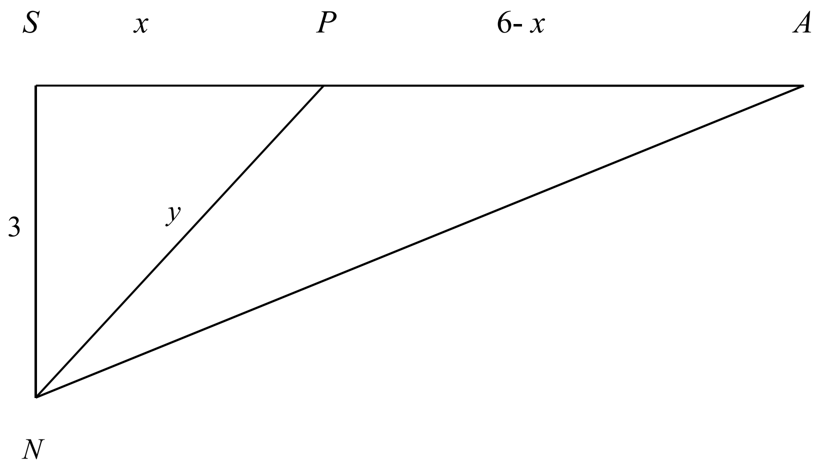
3. Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$.
[1 punt]

b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim?
[1 punt]

Resolució:

a) La situació gràfica és la següent:



Sabem que $\overline{NS} = 3$ km i $\overline{SA} = 6$ km. Anomenem $\overline{NP} = y$.

La funció que calcula el temps que es demana és $t(x) = \frac{y}{3} + \frac{6-x}{5}$.

Per Pitàgoras tenim la relació $y = \sqrt{x^2+9}$ i per tant $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$, com volíem veure.

b) Per a trobar el mínim de la funció t calculem la seva derivada i la igualem a zero.

$$t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}.$$

Si fem $t'(x) = 0$ obtenim $\frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{5}$, i d'aquí $5x = 3\sqrt{x^2+9}$

$$25x^2 = 9x^2 + 81$$

$$16x^2 = 81$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{81}{16}} = \pm 2{,}25$$

Observem que la solució negativa no es situa en el context del problema. Per tant l'únic candidat a extrem de la funció és quan $x = 2{,}25$.

Per a determinar que en $x = 2{,}25$ la funció té un mínim, calculem la derivada segona i obtenim $t''(x) = \frac{3}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$ i observem que és sempre positiva.

Per tant com que $t''(2{,}25) > 0$ podem assegurar que en $\boxed{x = 2{,}25\ km}$ la funció té un mínim.

El temps mínim serà $\boxed{t(2{,}25) = \frac{\sqrt{2{,}25^2+9}}{3} + \frac{6-2{,}25}{5} = 2\ hores}$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament gràfic del problema.

0,25 punts pel Teorema de Pitàgoras.

0,25 punts pel temps en el primer tram.

0,25 punts pel temps en el segon tram.

Apartat b)

0,25 punts per la derivada primera.

0,25 punts pel punt singular.

0,25 punts per la derivada segona i classificació de mínim. S'admet, amb la totalitat de la puntuació, que l'estudiant ho justifiqui correctament pel context del problema i no utilitzi la derivada segona.

0,25 punts per a la substitució.

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 9$.
[2 punts]

Resolució:

Es tracta de l'àrea limitada per dues paràboles que comparteixen el seu vèrtex, el punt (0,0), i la recta horitzontal $y = 9$.

Calculem en quines abscisses del primer quadrant l'horitzontal talla cadascuna de les paràboles.

$x^2 = 9$ porta a $x = 3$.

$4x^2 = 9$ porta a $x = +\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Per tant l'àrea serà (plantejant la integral de les diferències verticals entre la funció que marca el punt superior de la regió i la funció que marca el punt inferior de la regió)

$$\int_0^{3/2} (4x^2 - x^2)dx + \int_{3/2}^{3} (9 - x^2)dx = \int_0^{3/2} 3x^2 dx + \int_{3/2}^{3} (9 - x^2)dx =$$

$$= x^3\Big|_0^{3/2} + \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{3/2}^{3} = \frac{27}{8} + (27 - 9) - \left(\frac{27}{2} - \frac{9}{8}\right) = \boxed{9\,u^2}.$$

Observació: La mateixa regió també es pot subdividir en tres diferents regions i calcular l'àrea per separat i operar entre elles.

Pautes de correcció:

0,25 punts pel primer punt de tall.

0,25 punts pel segon punt de tall.

0,25 punts pel plantejament de la primera integral.

0,25 punts pel plantejament de la segona integral.

0,25 punts pel càlcul de la primera primitiva.

0,25 punts pel càlcul de la segona primitiva.

0,25 punts per aplicar la regla de Barrow a la primera integral.

0,25 punts per aplicar la regla de Barrow a la segona integral.

5. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i $s: (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.
[1 punt]

Resolució:

a) Els punts generals de les rectes r i s són, respectivament, de la forma

$$R = (2 + 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda)$$
$$S = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha).$$

.Calculem l'expressió dels punts mitjans:

$$M = \frac{R + S}{2} = \left(\frac{3 + 3\lambda + 2\alpha}{2}, \frac{3 + \lambda - \alpha}{2}, \frac{3 + 4\lambda + 3\alpha}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \lambda\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) + \alpha\left(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

I podem veure que efectivament formen un pla que és, a partir de l'expressió vectorial anterior, el que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors de les dues rectes, és a dir $(3,1,4)$ i $(2, -1,3)$.

b) Sabem que és el pla que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors $(3,1,4)$ i $(2, -1,3)$, per tant seran els punts (x, y, z) que satisfan l'equació

$$\begin{vmatrix} x - \frac{3}{2} & 3 & 2 \\ y - \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ z - \frac{3}{2} & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$7\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1\left(y - \frac{3}{2}\right) - 5\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{7x - y - 5z = \frac{3}{2}}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per les equacions paramètriques de les rectes.

0,5 punts per l'expressió general dels punts mitjos.

0,25 punts per l'argumentació de formar un pla.

Apartat b)

0,5 punts per la formulació de l'equació.

0,5 punts pel càlcul final.

---

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2 = I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible i A^{-1} satisfà $(A^{-1})^2 = I$.
[1 punt]

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $A^2 = I$.
[1 punt]

Resolució:

a) $A^2 = I$ ho podem reescriure com $A \cdot A = I$. Això ens diu que quan la matriu A la multipliquem per ella mateixa, sigui per la dreta o per l'esquerra, ens dóna la identitat. I això és precisament el que s'ha de complir per tal que A sigui invertible. A més a més, veiem que la seva inversa és ella mateixa, és a dir $A^{-1} = A$. Essent així, $(A^{-1})^2 = A^2 = I$ com voliem demostrar.

Observació: Alternativament, que la matriu sigui invertible també es pot demostrar a partir d'aplicar determinants i veure que té determinant no nul.

b) S'ha de complir que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} aa + bc & ab + 2b \\ ac + 2c & bc + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quan igualem terme a terme obtenim el següent sistema d'equacions

$$\begin{cases} aa + bc & = & 1 \\ ab + 2b & = & 0 \\ ac + 2c & = & 0 \\ bc + 4 & = & 1 \end{cases}$$

De la segona equació tenim $(a + 2)b = 0$ i com que $b \neq 0$ deduïm $a + 2 = 0$ i per tant que $a = -2$.

Quan substituïm $a = -2$ en el sistema ens queda

$$\begin{cases} bc & = & -3 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ bc & = & -3 \end{cases}$$

Per tant l'altra condició que se'n obté és $c = \frac{-3}{b}$ i per tant la forma general de les matrius que es demana és $\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ -3/b & 2 \end{pmatrix} amb\ b \neq 0}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'argumentació de ser invertible (factoritzant prèviament o no).

0,5 punts per comprovar la igualtat.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul matricial.

0,25 punts pel plantejament del sistema.

0,25 punts per la resolució del sistema.

0,25 punts per l'expressió final de les matrius.