Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat
Convocatòria 2016

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y+4z&=4k-7 \\ 2x-ky&=-1 \\ -2x&=k+1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k=0$.
[1 punt]

2. A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta r que té per equació $(x, y, z)=(1+\lambda, \lambda, 1-\lambda)$ i el pla π d'equació $2x-y+z=-2$.

a) Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π.
[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$Ax+By+Cz+D=0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

3. Sigui la funció $f(x)=x\,e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=1$.
[1 punt]

b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.
[1 punt]

4. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu totes les matrius de la forma $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Justifiqueu que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada que compleix la igualtat $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}$, aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible, i calculeu l'expressió de $\boldsymbol{A}^{-1}$ en funció de les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{I}$.

[1 punt]

5. Considereu el tetraedre que té per vèrtexs els punts $A=(x,0,1)$, $B=(0,x,1)$, $C=(3,0,0)$ i $D=(0,x,0)$, amb $0<x<3$.

a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió $V(x)=\frac{1}{6}(-x^2+3x)$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.

[1 punt]

Nota: Podeu calcular el volum del tetraedre de vèrtexs A, B, C i D amb l'expressió

$$\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|.$$

6. Siguin les paràboles $f(x)=x^2+k^2$ i $g(x)=-x^2+9k^2$.

a) Calculeu les abscisses, en funció de k, dels punts d'intersecció entre les dues paràboles.

[1 punt]

b) Calculeu el valor del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.

[1 punt]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Expliqueu raonadament si les afirmacions següents són vertaderes o falses:

***a*)** Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible determinat i la solució és $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

***b*)** Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible indeterminat.

[1 punt]

2. Siguin a $\mathbb{R}^3$ el pla π d'equació $x - y + 2z = 2$ i els punts $A = (3, -1, 2)$ i $B = (1, 1, -2)$.

***a*)** Comproveu que els punts A i B són simètrics respecte del pla π.

[1 punt]

***b*)** Si r és la recta dels punts P que té per equació $P = B + \lambda v$, en què λ és un paràmetre real i $v = (1, 1, 0)$, verifiqueu que els punts mitjans dels segments $\overline{AP}$ pertanyen al pla π.

[1 punt]

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu els màxims relatius, els mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

[1 punt]

b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

[1 punt]

4. Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu quadrada d'ordre n que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat.

a) Justifiqueu que la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible i que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

b) Calculeu el valor de a que fa que la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ compleixi la igualtat $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}$. Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ i comproveu que es correspon amb la matriu calculada a partir del resultat de l'apartat anterior.

[1 punt]

5. Siguin les rectes r: $(x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$ i $s: \dfrac{x-3}{2} = y - 5 = z + 2$.

a) Estudieu si les rectes r i s són paral·leles o perpendiculars.

[1 punt]

b) Determineu la posició relativa de les rectes r i s i calculeu l'equació paramètrica de la recta t que talla perpendicularment la recta r i la recta s.

[1 punt]

6. Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada $f'(x) = (x + 1)e^x$ i que $f(0) = 2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt de la corba d'abscissa $x = 0$.

[1 punt]

b) Calculeu l'expressió de $f(x)$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés