



SÈRIE 1

Exercici 1

1.1.

Com que les tres funcions que defineixen f són contínues en els seus respectius intervals de definició, només cal imposar que f sigui contínua als punts de contacte, $x = 0$ i $x = 2$. Tenim

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5e^{2x} = 5,$$

$$f(0) = 5e^0 = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + m)^2 + 1 = m^2 + 1.$$

Per tant, la funció f és contínua en $x = 0$ si i només si $m^2 + 1 = 5$, cosa que passa si i només si $m = \pm 2$. D'altra banda,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + m)^2 + 1 = (2 + m)^2 + 1,$$

$$f(2) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1,$$

i la funció f és contínua en $x = 2$ si i només si $(2 + m)^2 + 1 = 1$, cosa que passa si i només si $m = -2$. Per tant, la funció és contínua en tots els punts només quan $m = -2$.



1.2.

La gràfica corresponent és:



Per representar la funció quadràtica es pot calcular el vèrtex amb la fórmula $x = \frac{-b}{2a} = 2$ o bé observar que és una translació 2 unitats a la dreta i una unitat amunt de la paràbola $y = x^2$.

És clar, fins i tot sense la gràfica, que la funció és positiva en tot el seu domini. Per tant per calcular l'àrea demanada ens cal calcular la integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 5e^{2x} dx + \int_0^2 ((x-2)^2 + 1) dx + \int_2^3 1 dx = \\ &= \left[\frac{5}{2} e^{2x} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{(x-2)^3}{3} + x \right]_0^2 + [x]_2^3 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2e^2} + 2 + \frac{8}{3} + 3 - 2 \approx 7,83 u^2. \end{aligned}$$



1.3.

Com que el primer tram de la gràfica és creixent, i el tercer és pla, només pot haver-hi punts amb pendent negativa al tram del mig. Volem un punt on el pendent sigui -2 , per tant derivem el tram parabòlic i igulem la derivada a -2 :

$$2(x - 2) = -2 \rightarrow x = 1.$$

La recta tangent al punt $(1, f(1)) = (1, 2)$ és

$$y - 2 = -2(x - 1) \rightarrow y = -2x + 4.$$

Pautes de correcció: (1.1) Compteu 0,25 punts per justificar que ja és contínua fora dels punts de contacte; 0,25 per estudiar cadascun dels dos contactes, i 0,25 per combinar-ho i donar la resposta final correcta. (1.2) Compteu 0,25 per l'esbós de la gràfica; 0,25 pel planteig correcte de l'àrea com a suma d'integrals; 0,25 pel càlcul de la integral de la part exponencial, i 0,25 per la integral de la part parabòlica. (1.3) Compteu 0,25 per trobar el punt i 0,25 pel càlcul de l'equació de la recta tangent.

Exercici 2

2.1.

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Calculant el determinant de la matriu A , tenim

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + m^2 + 1 - 3m - 1 - m = m^2 - 4m + 3.$$

Per obtenir els valors crítics, fem

$$|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 3, 1.$$

En el cas $m \neq 1, 3$, tenim $|A| \neq 0$, $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3$ i, com que hi ha tres incògnites, el sistema és compatible determinat.

En el cas $m = 3$, tenim $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ per tant $\text{rang}(A) = 2$. Per altra banda,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

i deduïm que $\text{rang}(\bar{A}) = 3$ i que el sistema és incompatible en aquest cas.

Finalment, en el cas $m = 1$, tenim $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\text{rang}(A) = 2$, i també $\text{rang}(\bar{A}) = 2$ per tenir la primera i tercera files iguals. En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

2.2.

Es tracta de tres plans a l'espai, que estan en diverses posicions relatives depenent del valor del paràmetre: d'acord amb la discussió de l'apartat anterior, si $m \neq 1, 3$, el sistema és compatible determinat, la qual cosa significa que els tres plans es tallen en un únic punt comú. Si $m = 3$ és incompatible, cosa que vol dir que no tenen cap punt en comú: això es pot veure directament observant que, en aquest cas, el primer pla, $x + 3y + z = 4$, i el segon, $x + 3y + z = 5$, són paral·lels i no coincidents. Finalment, si $m = 1$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i els tres plans s'intersequen en una recta comuna. Per trobar-ne l'equació cal resoldre el sistema en aquest cas:



$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{F1=F3} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{array} \right\} \xRightarrow{z=\lambda} \left. \begin{array}{l} x + y = 4 - \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 5 - \lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 3\lambda - 5 + \lambda}{2} = \frac{7 - 2\lambda}{2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - \lambda \\ 1 & 5 - \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5 - \lambda - 4 + \lambda}{2} = \frac{1}{2}.$$

La solució del sistema són tots els punts de la forma $\left(\frac{7-2\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \lambda\right)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. És a dir, la intersecció dels tres plans, en aquest cas, consisteix en la recta d'equació $(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \lambda(-1, 0, 1)$.

2.3.

Per a $m = 1$, el sistema té infinites solucions, una de les quals és $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, precisament la que correspon a $\lambda = \frac{1}{2}$. Per tant, qualsevol nova equació que també tingui aquest punt com a solució, per exemple $x = 3$, i que doni una matriu de coeficients total de rang 3, convertirà el sistema en compatible determinat amb el punt desitjat com a única solució; l'equació proposada ho compleix:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Criteris de correcció: (2.1) Compteu 0,25 punts per calcular el determinant i trobar els dos valors crítics, i 0,25 punts per la discussió de cadascun dels tres casos. **(2.2)** Compteu 0,25 punts per cadascuna de les tres interpretacions geomètriques i 0,25 per la resolució del sistema en el cas $m = 1$. **(2.3)** Compteu 0,5 punts per donar l'equació demanada i raonar que és vàlida.



Exercici 3

3.1.

Calculem primer la probabilitat que un seguidor del grup aconseguixi comprar una entrada al web. Considerem els successos:

ES = "Obtenir entrada al sorteig",

W = "Intentar comprar-la al web",

EW = "Aconseguir entrada al web".

A partir de les dades de l'enunciat, tenim que

$$P(ES) = 0,16,$$

$$P(W) = (1 - 0,16) \cdot 6/7 = 0,72,$$

$$P(EW) = P(W) \cdot 0,25 = 0,18.$$

Per tant, en total el $16 + 18 = 34$ per cent dels seguidors d'aquest grup al municipi aconseguixen entrada per al concert. Si el 16% dels seguidors corresponen a 24 persones, el 34% correspondran a:

$$\frac{24}{16} = \frac{x}{34} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{34} \Rightarrow x = 17 \cdot 3 = 51 \text{ persones.}$$

3.2.

Segui noE el succés "No tenir entrada per al concert". Ens demanen $P(W|noE)$. Per la llei de Bayes,

$$P(W|noE) = \frac{P(noE|W)P(W)}{P(noE)}.$$

De l'apartat anterior sabem que la probabilitat de tenir entrada és del 34%, per tant $P(noE) = 1 - 0,34 = 0,66$. Sabem també que $P(W) = 0,72$ i $P(noE|W) = 1 - 0,25 = 0,75$. Per tant,

$$P(W|noE) = \frac{0,75 \cdot 0,72}{0,66} \approx 0,82.$$

3.3. Tenim la funció polinòmica $S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90$, a l'interval $t \in [0, 5]$; òbviament és contínua, per ser polinòmica. L'enunciat ens demana si en algun moment $S(t)$ valdrà 100, és a dir,

$$-t^3 + 12t^2 - 30t + 90 = 100.$$



Proves d'accés a la Universitat 2026, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

Si considerem la nova funció $D(t) = S(t) - 100$, el problema es transforma en saber si $D(t) = 0$ en algun moment $t \in [0,5]$. Com que D també és contínua, i tenim que

$$D(0) = -10 < 0 \quad \text{i} \quad D(5) = 15 > 0,$$

es compleixen les hipòtesis del teorema de Bolzano i, per tant, es pot afirmar que existeix un punt $c \in (0,5)$ tal que $D(c) = 0$. Aproximem-lo amb una dècima de precisió:

$$D(2) = -30 < 0 \Rightarrow \exists c \in (2,5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4) = -2 < 0 \Rightarrow \exists c \in (4,5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'5) = 6'85 > 0 \Rightarrow \exists c \in (4,4'5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'2) = 1'592 > 0 \Rightarrow \exists c \in (4,4'2) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'1) = -0'201 < 0 \Rightarrow \exists c \in (4'1,4'2) \text{ tal que } D(c) = 0.$$

Així doncs, els llums de la sala s'activaran aproximadament al cap de 4,1 minuts d'haver començat a sonar la cançó més famosa del grup.

Criteris de correcció: (3.1) Compteu 0,5 punts per calcular el percentatge de seguidors que obtenen entrada, i 0,25 punts pel nombre de persones que això representa. (3.2) Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i 0,5 pel càlcul de la probabilitat demanada. (3.3) Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i per comentar la continuïtat de la funció; 0,5 per la primera aplicació del teorema de Bolzano correctament raonada, i 0,25 punts per l'aproximació fins a una dècima.



Exercici 4

OPCIÓ A.

Anomenem x a la longitud en metres del primer tros de barana, amb el qual es farà el tancat circular; de l'altre tros, de $10 - x$ metres de longitud, se'n farà el tancat quadrat. Com que x ha de ser el perímetre d'una circumferència, el seu radi serà $r = \frac{x}{2\pi}$, i l'àrea d'aquest espai circular delimitat valdrà $A_1 = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$. Per altra banda, com que $10 - x$ és el perímetre d'un quadrat, el seu costat serà $c = \frac{10-x}{4}$ i l'àrea d'aquest espai quadrat valdrà $A_2 = \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$. Així la funció a minimitzar és

$$A(x) = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{100 - 20x + x^2}{16} = \frac{(4 + \pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}.$$

Derivem i busquem els punts crítics

$$A'(x) = \frac{(8 + 2\pi)x - 20\pi}{16\pi} = 0 \rightarrow x = \frac{20\pi}{8 + 2\pi} \simeq 4,4 \text{ m}.$$

Per assegurar que es tracta d'un mínim, podem fer la segona derivada i comprovar que és positiva:

$$A''(x) = \frac{8 + 2\pi}{16\pi} > 0.$$

Així doncs, per tal de minimitzar la superfície total dels dos espais, l'arquitecte d'aquest poble haurà de fer un tancat circular amb 4,4 m de barana i un tancat quadrat amb els 5,6 m restants. La superfície total dels dos tancats serà de

$$A(4,4) = \frac{(4 + \pi) \cdot 4,4^2 - 20\pi \cdot 4,4 + 100\pi}{16\pi} \simeq 3,5 \text{ m}^2.$$

Criteris de correcció: Compteu 0,25 punts per plantejar el perímetre de la circumferència; 0,25 punts pel perímetre del quadrat, i 0,5 punts per l'expressió de l'àrea total en funció d'una sola variable. Compteu 0,5 punts per la derivada i obtenció del punt crític; 0,5 per comprovar que es tracta d'un mínim, i 0,5 per la resposta final, incloent-hi les dues longituds i el valor de l'àrea mínima.



OPCIÓ B.

4.1.

Comencem trobant els vectors $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0, 1, 2)$. El vector normal al pla buscat és

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4i + 2k - i - 4j = (-5, -4, 2).$$

Així doncs el pla buscat té equació de la forma $5x + 4y - 2z + D = 0$. Substituint les coordenades del punt R a l'equació anterior deduïm $D = -7$ i, per tant, l'equació buscada és

$$\pi: 5x + 4y - 2z - 7 = 0.$$

4.2.

i pensem el triangle ΔPQR amb base PQ , aquesta mesura

$$d(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Per altra banda, la recta $\overline{PQ}$ té equació

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(2, -2, 1) = (1 + 2\lambda, -2\lambda, -1 + \lambda),$$

i vector director $(2, -2, 1)$. Per tant, el pla perpendicular que passa per R té equació de la forma $2x - 2y + z + D = 0$, amb $2 - 2 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -1$. I la projecció de R sobre la recta $\overline{PQ}$ serà la intersecció del pla $2x - 2y + z - 1 = 0$ amb la recta $\overline{PQ}$, és a dir

$$2(1 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) + (-1 + \lambda) - 1 = 0 \rightarrow 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0,$$

és el punt $(1, 0, -1)$ (és casualitat que sigui P ; això vol dir que l'angle $\widehat{RPQ}$ és recte).

Així l'àrea del triangle ΔPQR és

$$\begin{aligned} \text{Àrea}(PQR) &= \frac{\text{base} \cdot \text{alçada}}{2} = \frac{d(P, Q) \cdot d(P, R)}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1+1)^2}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{2} u^2. \end{aligned}$$

Alternativament, també podem calcular l'àrea més ràpidament, aprofitant el producte vectorial de l'apartat anterior i la fórmula

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{45} = \frac{3}{2} \sqrt{5} u^2.$$



4.3.

El volum del tetraedre determinat pels punts P, Q, R, S és

$$Volum(PQRS) = \frac{\text{Àrea}(PQR) \cdot \text{alçada}}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot d(S, \pi)}{3}.$$

Com que la distància del punt $S = (x, y, z)$ al pla $\pi: 5x + 4y - 2z - 7 = 0$ és

$$d(S, \pi) = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{45}},$$

el lloc geomètric dels punts S tals que el tetraedre format per P, Q, R, S tingui volum 1 ve donat per

$$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{45}}}{3} = 1,$$

$$5x + 4y - 2z - 7 = \pm 6,$$

és a dir, són dos plans paral·lels al pla π , d'equacions

$$5x + 4y - 2z - 1 = 0, \quad i \quad 5x + 4y - 2z - 13 = 0.$$

Criteris de correcció: (4.1) Compteu 0,75 punts pel càlcul de l'equació correcta del pla. (4.2) Compteu 0,5 punts pel càlcul de la base i l'alçada del triangle, i 0,25 per l'àrea. (4.3) Compteu 0,5 punts pel planteig i desenvolupament del problema; 0,25 per tractar correctament el valor absolut i 0,25 per les equacions dels dos plans finals.

SÈRIE 5

Exercici 1

1.1. Per trobar els punts de tall entre paràbola i hipèrbola, resollem l'equació $f(x) = g(x)$:

$$-x^2 + 5x = 8 - \frac{8}{x+1}$$

$$(x+1)(-x^2 + 5x) = 8x + 8 - 8$$

$$-x^3 + 4x^2 + 5x = 8x$$

$$x(-x^2 + 4x - 3) = 0.$$

Les solucions són $x = 0$ i $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$. Per tant, es tallen exactament en tres punts. Calculant les seves imatges, es tracta de $(0, f(0)) = (0, 0)$, $(1, f(1)) = (1, 4)$ i $(3, f(3)) = (3, 6)$.

1.2. Com que no hi ha més punts de tall que els tres calculats a l'apartat anterior, entre 1 i 3 les gràfiques no es toquen (de fet, f està per damunt de g) i l'àrea demanada és

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 5x - 8 + \frac{8}{x+1} \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 8x + 8 \ln(x+1) \right]_1^3 = \\ &= \left(-\frac{27}{3} + \frac{45}{2} - 24 + 8 \ln(4) \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 8 + 8 \ln(2) \right) = -\frac{26}{3} + 4 + 8 \ln(2) \\ &= 0.878 \dots \text{ u}^2. \end{aligned}$$



Proves d'accés a la Universitat 2026, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

1.3. Efectivament $f(x)$ té arrels als punts d'abscisses 0 i 5, $f(0) = -0^2 + 0 = 0$ i $f(5) = -5^2 + 25 = 0$. La paràbola $y = f(x)$ té el vèrtex situat al punt $-2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$, que efectivament té per imatge $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} = \frac{25}{4} = 6,25$.

A més, $y = f(x)$ és l'única paràbola amb aquestes dues propietats ja que qualsevol que les compleixi haurà de ser de la forma $f(x) = ax(x - 5)$; i com que el vèrtex ha d'estar al punt mig de les dues arrels $x = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$ i ha de tenir imatge 6,25, tindrem

$$6,25 = f\left(\frac{5}{2}\right) = a \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} - 5\right) = a \cdot \left(-\frac{25}{4}\right) = -6,25 a.$$

Per tant $a = -1$, i l'única paràbola és $f(x) = -1 \cdot x(x - 5) = -x^2 + 5x$.

Criteris de correcció: (1.1.) Compteu 0,5 per plantejar i desenvolupar l'equació, i 0,25 pels punts de tall. **(1.2.)** Compteu 0,25 pel planteig correcte de l'àrea, 0,5 pel càlcul de la primitiva, i 0,25 pel resultat final. Penalitzeu 0,25 si resten les funcions al revés i/o donen com a bona una àrea negativa. **(1.3.)** Compteu 0,25 per la comprovació de les dues propietats demanades i 0,5 per la justificació que és l'única paràbola que les compleix.



Exercici 2

2.1. El producte MN i el seu determinant donen

$$MN = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+3k-3 & 3 \\ 3k-3-k+1 & k-1-2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3k+6 & 3 \\ 2k-2 & k-3 \end{vmatrix} = 3k^2 + 6k - 9k - 18 - 6k + 6 = 3(k^2 - 3k - 4),$$

que és zero per als valors $k = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4, -1$. Per tant, la matriu MN és invertible per a tot k excepte $k = 4$ i $k = -1$.

2.2. El producte NM dona

$$NM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Com que la primera columna és igual a la segona menys k vegades la tercera, el determinant és sempre zero i la matriu NM no és invertible per cap valor de k . Alternativament, es pot calcular el determinant i veiem que dona zero independentment de k :

$$\begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2(3k-3) \begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(3k-3)(-k-8+1+k-1+8) = 0.$$

2.3. En forma matricial es tracta del sistema d'equacions

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & m \\ k-1 & -1 & -1 & n \end{array} \right).$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també, independentment dels tres paràmetres. I com que hi ha 3 incògnites, aquest sistema és compatible indeterminat per qualsevol valor de m , de n i de k .

Criteris de correcció: (2.1.) Compteu 0,25 pel producte matricial, 0,25 pel càlcul del determinant, i 0,25 per donar la resposta correcta. (2.2.) Compteu 0,25 pel producte matricial, 0,25 per argumentar que el determinant és sempre zero, i 0,25 per deduir la resposta correcta. (2.3.) Compteu 0,25 per interpretar el sistema d'equacions demanat, 0,5 per calcular els rangs, i 0,25 per donar la resposta correcta.



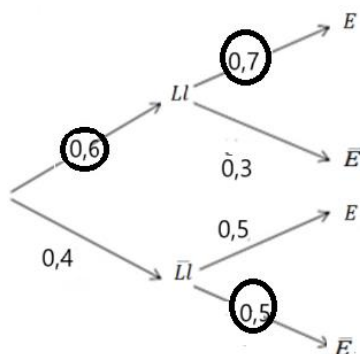
Exercici 3

3.1. Considerem els successos aleatoris següents:

LL = "llegir almenys dos llibres al mes",

E = "fer un mínim de quatre hores setmanals d'esport".

Les dades del problema ens diuen que $P(LL) = 0,6$, $P(E|LL) = 0,7$, i $P(\bar{E}|\bar{LL}) = 0,5$. Podem visualitzar-les en el diagrama d'arbre adjunt:



Pel teorema de la probabilitat total:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(LL) \cdot P(E|LL) + P(\bar{LL}) \cdot P(E|\bar{LL}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 = \\ &= 0,42 + 0,20 = 0,62. \end{aligned}$$

3.2. Per la fórmula de Bayes:

$$P(LL|\bar{E}) = \frac{P(LL \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(\bar{E}|LL) \cdot P(LL)}{1 - P(E)} = \frac{0,3 \cdot 0,6}{1 - 0,62} = 0,47 \dots$$



3.3. Cal trobar els valors màxim i mínim absoluts de la funció $f(x) = 7 - x + \ln(2x - 1)$ en l'interval $[1, 6]$. La derivada de $f(x)$ és $f'(x) = -1 + \frac{2}{2x-1}$, que s'anul·la només per $x = \frac{3}{2}$. Aquest punt crític es correspon a un màxim local, ja que la funció (a la vista del signe de la derivada) creix per $x < \frac{3}{2}$ i decreix per $x > \frac{3}{2}$. Com que $f(1) = 7 - 1 + \ln 1 = 6$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 7 - \frac{3}{2} + \ln 2 \approx 6,19$, i $f(6) = 7 - 6 + \ln 11 \approx 3,4$, deduïm que el màxim i mínim absoluts de la funció a l'interval $[1, 6]$ són als punts $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 6,19$ i $f(6) \approx 3,4$, respectivament. Per tant, segons aquest model, l'Alba ha practicat entre un mínim de 3,4 i un màxim de 6,19 hores per setmana d'esport.

Criteris de correcció: (3.1.) Compteu 0,25 per plantejar la llei de la probabilitat total, 0,25 per identificar les dades del problema, i 0,25 pel càlcul. (3.2.) Compteu 0,25 per plantejar la fórmula de Bayes (o la fórmula de la probabilitat condicionada) i 0,5 pel càlcul. (3.3.) Compteu 0,25 per la derivada i per detectar que $3/2$ és l'únic punt crític, 0,25 per les zones de creixement i decreixement, 0,25 per argumentar el màxim global, i 0,25 per argumentar el mínim global.



Exercici 4

OPCIÓ A.

4.1. Usarem l'expressió de la recta punt-pendent, $y - f(x_0) = m(x - x_0)$. Com que la recta buscada ha de passar pel punt $x_0 = -1$, $f(x_0) = -1$, i ha de tenir pendent $f'(x_0) = f'(-1) = 2$ (tal com es veu al gràfic), l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt $x_0 = -1$ serà

$$y - (-1) = 2 \cdot (x - (-1)) \rightarrow y + 1 = 2 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 2x + 1.$$

4.2. Els punts crítics de $f(x)$ són aquells que satisfan $f'(x) = 0$. Del gràfic es veu clarament que són els punts $x = -2$, $x = 0$, i $x = 1$: aquestes abscisses són possibles extrems relatius de la funció $f(x)$.

Com que $f'(x)$ és creixent en $x = -2$, la seva derivada en aquest punt serà positiva, $f''(-2) > 0$, i això vol dir que $x = -2$ és un mínim local de $f(x)$.

Anàlogament, com que $f'(x)$ és positiva immediatament abans de $x = 1$, i negativa immediatament després, la funció $f(x)$ és creixent abans de $x = 1$ i decreixent després; per tant $x = 1$ és un màxim local de $f(x)$.

El punt $x = 0$ és diferent. Tant abans com després $f'(x)$ és positiva per tant, $f(x)$ és creixent en el punt $x = 0$. Però a més, $f'(x)$ és decreixent abans de $x = 0$ i per tant la seva derivada (és a dir, $f''(x)$) és negativa, mentre que és creixent després de $x = 0$ i per tant $f''(x)$ és positiva. Això vol dir que la funció $f(x)$ és convexa abans de $x = 0$ i còncava després. Per tant, el punt $x = 0$ és un punt d'inflexió de $f(x)$.

4.3. Com que $f(x)$ és una primitiva de $f'(x)$, l'àrea que ens demanen és fàcil de calcular usant la regla de Barrow (i usant les dades $f(0) = -0,2$ i $f(-1) = -1$):

$$A = \int_{-1}^0 f'(x) dx = [f(x)]_{-1}^0 = f(0) - f(-1) = -0,2 - (-1) = 0,8 u^2.$$

Criteris de correcció: (4.1.) Compteu 0,5 per determinar el pendent de la recta tangent a partir del gràfic, i 0,5 per l'equació de la recta. **(4.2.)** Compteu 0,25 per la llista de punts crítics, 0,25 per deduir que $x = -2$ és un mínim, 0,25 per deduir que $x = 1$ és un màxim, i 0,25 per deduir que $x = 0$ és un punt d'inflexió. **(4.3.)** Compteu 0,25 per reconèixer que $f(x)$ és una primitiva de $f'(x)$, i 0,25 pel càlcul de l'àrea.



OPCIÓ B.

4.1. Calculem la distància entre els punts $A(1, 2, 3)$ i $B(5, 3, 7)$:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|(4, 1, 4)\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{33} \approx 5,74 \text{ cm.}$$

Per tant, el sensor ha recorregut 5,74 cm.

4.2. Hem de calcular la distància del punt B al pla π , $d(B, \pi)$. Per fer-ho, necessitem l'equació general del pla:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-6-(y-1) = 0 \Leftrightarrow x-y-5 = 0.$$

Aplicant la fórmula de la distància punt-pla, obtenim

$$d(B, \pi) = \frac{|1 \cdot 5 - 1 \cdot 3 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12 \text{ cm.}$$

4.3. Per trobar el punt de xoc, hem de buscar el punt de tall del pla π amb la recta que passa per A i per B . Primer explicitem l'equació d'aquesta recta:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 1, 4) = (1 + 4\lambda, 2 + \lambda, 3 + 4\lambda),$$

i ara busquem el punt en comú imposant l'equació del pla:

$$1 + 4\lambda - (2 + \lambda) - 5 = 0,$$

d'on $3\lambda - 6 = 0$ i $\lambda = 2$. Això vol dir que el punt de xoc és

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + 2(4, 1, 4) = (9, 4, 11).$$

Criteris de correcció: (4.1.) Compteu 0,5 pel càlcul de la distància entre els dos punts.

(4.2.) Compteu 0,5 per trobar l'equació general del pla i 0,5 pel càlcul de la distància.

(4.3.) Compteu 0,5 per l'equació de la recta i 0,5 pel càlcul del punt intersecció.