

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Indiqueu l'opció triada:

Exercici 4: Opció A ☐ Opció B ☐

Espai per a la correcció

Qualificació	
Exercici 1	
Exercici 2	
Exercici 3	
Exercici 4	
Suma de notes parcials	
Qualificació final	

Espai per a la revisió

Comprovació	2a correcció

Etiqueta de qualificació

Etiqueta de correcció

Etiqueta de l'estudiant

Ubicació del tribunal

Número del tribunal

L'examen consta de QUATRE exercicis obligatoris. Cada exercici val 2,5 punts. Feu els exercicis 1, 2 i 3 respondent a TOTES les qüestions que s'hi plantegen. A l'exercici 4, trieu UNA de les dues opcions (A o B) proposades i indiqueu-la a la portada.

En totes les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què. Cal que la redacció de la resposta es faci de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc del final del quadern per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de l'exercici corresponent.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Exercici 1

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 1	
---------------------------------	--

Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{2x} & x \leq 0 \\ (x+m)^2 + 1 & 0 < x < 2, \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

on m és un paràmetre real.

- 1.1.** Determineu els valors de m que fan que la funció $f(x)$ sigui contínua en tot el seu domini. Justifiqueu la resposta.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.1	
----------------------------	--

- 1.2.** Feu un esbós de la gràfica de $y=f(x)$ per al cas $m=-2$, i calculeu l'àrea delimitada per aquesta gràfica, l'eix OX i les rectes $x=-1$ i $x=3$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.2	
----------------------------	--

- 1.3.** Per a $m=-2$, trobeu un punt on la recta tangent a $y=f(x)$ sigui paral·lela a $y=-2x$. Calculeu l'equació d'aquesta recta tangent.

[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 1.3	
----------------------------	--

Exercici 2

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	
---------------------------------	--

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que està format per tres plans a l'espai i depèn del paràmetre real m :

$$\left. \begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array} \right\}.$$

2.1. Discussiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m .

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.1	
----------------------------	--

2.2. Interpreteu geomètricament aquest sistema per a tots els valors del paràmetre m i resoleu-lo, si és possible, per al cas $m = 1$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.2	
----------------------------	--

2.3. Per a $m = 1$, és possible afegir una quarta equació de manera que el sistema resultant sigui compatible determinat i tingui com a solució $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$? Raoneu la resposta.

[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 2.3	
----------------------------	--

Exercici 3

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	
---------------------------------	--

L'Ajuntament de Canet de Mar ha aconseguit 24 entrades gratuïtes per a un concert d'un grup de rock català, i ha decidit sortejar-les entre els veïns interessats a assistir-hi. Tots els veïns del poble seguidors d'aquest grup s'apunten al sorteig, i només al 16 % els toca una entrada. De la resta de seguidors del grup, sis setenes parts intenten comprar una entrada per la web, on la probabilitat d'aconseguir-ne és del 25 %.

3.1. Quantes persones d'aquest municipi tenen entrada per al concert?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	
----------------------------	--

3.2. Si escollim a l'atzar un veí de Canet seguidor d'aquest grup de rock i no té entrada per al concert, quina és la probabilitat que hagués intentat aconseguir-la via web?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	
----------------------------	--

- 3.3. El dia del concert, l'equip de so mesura el nivell de decibels generat pels crits entusiastes del públic durant els 5 minuts de durada de la cançó més famosa del grup; es pot aproximar per la funció següent:

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90, \quad t \in [0, 5],$$

on t és el temps en minuts i $S(t)$ els decibels. Quan se superen els 100 decibels es considera que el públic està molt entregat i s'activen automàticament uns efectes lumínics especials. S'activaran en algun moment durant aquests cinc minuts? Si la resposta és afirmativa, calculeu en quin minut s'activen, aproximat a les dècimes.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 3.3	
----------------------------	--

Exercici 4

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	
---------------------------------	--

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.

OPCIÓ A

L'alcalde d'un poble de Catalunya encarrega a l'arquitecte municipal el disseny d'un parc infantil que es construirà en un terreny públic. Per a complir la normativa vigent, en el parc hi ha d'haver dos espais ben delimitats: un per a una boca de reg —el qual, segons l'arquitecte, ha de tenir forma circular—, i un altre per a una caseta on es guardin les eines de manteniment —el qual ha de tenir forma quadrada. Per motius estètics, l'arquitecte vol delimitar cadascun d'aquests dos espais amb una barana de forja. Sabent que les dues baranes mesuren exactament 10 m de longitud en total, quina mida ha de tenir la barana de cada espai per tal que la suma de les superfícies dels dos espais sigui la més petita possible? Quina és aquesta superfície mínima?

OPCIÓ B

Considereu els punts de l'espai $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ i $R = (1, 1, 1)$.

- 4.1. Calculeu l'equació del pla que conté els punts P , Q i R .

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	
----------------------------	--

- 4.2. Comproveu que l'àrea del triangle ΔPQR és $\frac{3\sqrt{5}}{2}u^2$.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	
----------------------------	--

- 4.3. Determineu les condicions que han de complir les coordenades d'un quart punt $S = (x, y, z)$ per tal que P , Q , R i S formin un tetraedre de volum 1. (El volum del tetraedre format pels

punts P , Q , R i S és: $\text{volum}(PQRS) = \frac{\text{àrea}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3}$.)

[1 punt]

ació de l'apartat 4.3	
-----------------------	--

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

Comprovació i 2a correcció:

3a correcció:

Etiqueta de l'estudiant

--



IEC
Institut d'Estudis
Catalans

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 5

Indiqueu l'opció triada:

Exercici 4: Opció A ☐ Opció B ☐

Espai per a la correcció

Qualificació	
Exercici 1	
Exercici 2	
Exercici 3	
Exercici 4	
Suma de notes parcials	
Qualificació final	

Espai per a la revisió

Comprovació	2a correcció

Etiqueta de qualificació

Etiqueta de correcció

Etiqueta de l'estudiant

Ubicació del tribunal

Número del tribunal

L'examen consta de QUATRE exercicis obligatoris. Cada exercici val 2,5 punts. Feu els exercicis 1, 2 i 3 responent a TOTES les qüestions que s'hi plantegen. A l'exercici 4, trieu UNA de les dues opcions (A o B) proposades i indiqueu-la a la portada.

En totes les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què. Cal que la redacció de la resposta es faci de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc del final del quadern per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de l'exercici corresponent.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Exercici 1

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 1	
---------------------------------	--

Considereu la paràbola $y=f(x)$, amb $f(x)=-x^2+5x$, i la hipèrbola $y=g(x)$, amb

$$g(x)=8-\frac{8}{x+1}.$$

1.1. En quants punts es tallen les gràfiques d'aquestes dues funcions? Calculeu-los tots.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 1.1	
----------------------------	--

1.2. Calculeu l'àrea de la regió situada entre les dues corbes des de $x=1$ fins a $x=3$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.2	
----------------------------	--

- 1.3.** Comproveu que $f(x)$ té les arrels als punts d'abscissa $x = 0$ i $x = 5$, i que l'ordenada del vèrtex de la paràbola $y = f(x)$ és $y = 6,25$. Justifiqueu que $y = f(x)$ és l'única paràbola que existeix amb aquestes dues propietats.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 1.3	
----------------------------	--

Exercici 2

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	
---------------------------------	--

Considereu les matrius $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on k és un nombre real qualsevol.

2.1. Calculeu els valors de k per als quals MN és invertible.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 2.1	
----------------------------	--

2.2. Calculeu els valors de k per als quals NM és invertible.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 2.2	
----------------------------	--

2.3. Estudieu per a quins valors reals de m , n i k el sistema $\mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ és compatible indeterminat.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.3	
----------------------------	--

Exercici 3

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	
---------------------------------	--

En una ciutat s'ha estudiat la relació entre els hàbits de lectura i la pràctica d'esport en l'alumnat de batxillerat. Per a fer-ho, s'han formulat les dues preguntes següents a l'alumnat d'aquesta etapa educativa: «Llegeixes com a mínim dos llibres al mes?» i «Practiques algun esport almenys quatre hores a la setmana?»

Dels resultats de l'enquesta, es desprèn que el 60 % llegeixen com a mínim dos llibres al mes, dels quals el 70 % practiquen algun esport un mínim de quatre hores a la setmana. També s'observa que, d'entre els que no llegeixen un mínim de dos llibres al mes, el 50 % fan menys de quatre hores setmanals d'esport.

Si escollim a l'atzar un alumne/a de batxillerat d'aquesta ciutat:

3.1. Quina és la probabilitat que faci esport almenys quatre hores setmanals?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	
----------------------------	--

3.2. Si sabem que aquest alumne/a fa esport menys de quatre hores setmanals, quina probabilitat hi ha que llegeixi almenys dos llibres al mes?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	
----------------------------	--

L'Alba és una estudiant de batxillerat que ha anat anotant durant tot el curs quantes hores dedicava a la setmana a llegir i quantes a fer esport. Per a cada setmana té apuntat un nombre real x que correspon a la quantitat d'hores de lectura i que oscilla entre 1 i 6, i un nombre real y que correspon a la quantitat d'hores de pràctica esportiva. Ha observat que la relació $y = 7 - x + \ln(2x - 1)$ s'ajusta força bé a les dades que ha anotat.

- 3.3.** Calculeu, segons aquest model, quin és el màxim i el mínim d'hores per setmana que l'Alba ha dedicat a practicar esport.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 3.3	
----------------------------	--

Exercici 4

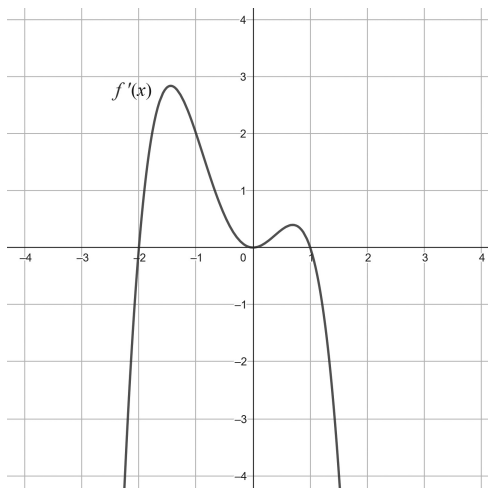
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	
---------------------------------	--

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.

OPCIÓ A

D'una funció $f(x)$, sabem que passa pel punt $(-1, -1)$ i que la gràfica de la seva funció derivada és la següent:



- 4.1. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt $(-1, -1)$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.1	
----------------------------	--

- 4.2. Estudieu si $f(x)$ té punts crítics (punts on $f'(x) = 0$) i, en cas que en tingui, determineu-ne les abscisses i classifiqueu-los segons si són màxims, mínims o punts d'inflexió de $f(x)$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.2	
----------------------------	--

- 4.3. Sabent, a més, que $f(0) = -0,2$, calculeu l'àrea entre la gràfica de $f'(x)$ i l'eix de les abscisses, des de $x = -1$ fins a $x = 0$.

[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.3	
----------------------------	--

OPCIÓ B

En una indústria es fan servir braços robòtics amb sensors per a mesurar amb precisió determinades peces metàl·liques i comprovar si tenen irregularitats. Les peces es col·loquen sobre la superfície determinada pel pla $\pi: (x, y, z) = (6, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$ i, per damunt seu, un braç robòtic desplaça un sensor des del punt $A = (1, 2, 3)$ fins al punt $B = (5, 3, 7)$ en línia recta (les unitats dels tres eixos de coordenades estan expressades en centímetres).

- 4.1. Quina distància ha recorregut el sensor?

[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	
----------------------------	--

- 4.2. En acabar el moviment, a quina distància de la superfície es troba el sensor?

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.2	
----------------------------	--

- 4.3. Si el sensor seguís movent-se en la mateixa línia recta i en el mateix sentit, en quin punt xocaria amb la superfície?

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.3	
----------------------------	--

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

Comprovació i 2a correcció:

3a correcció:

Etiqueta de l'estudiant

--



IEC
Institut d'Estudis
Catalans